

## Examen LM216

4 Juin 2009

**Exercice 1 :** On définit  $f(x, y) = (x + y) \log(x^2 + y^2)$ , pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

- a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- b)  $f$  admet-elle des dérivées partielles en  $(0, 0)$  ?
- c) Montrer que  $f$  admet 4 points critiques dont on donnera les coordonnées.
- d) Calculer la hessienne de  $f$  et en déduire la nature de ces points critiques.
- e) Montrer que la fonction  $f$  n'admet pas d'extremum local au point  $(0, 0)$ .
- f) Soit  $r > 0$ . Montrer que  $f$  atteint son maximum et minimum global sur la boule  $B(0, r)$ , c'est à dire qu'il existe deux points  $P$  et  $Q$  dans  $B(0, r)$  tels que  $f(P) = \max_{(x,y) \in B(0,r)} f(x, y)$  et  $f(Q) = \min_{(x,y) \in B(0,r)} f(x, y)$ .
- g) Montrer que si  $r \leq r_0 = \frac{1}{e\sqrt{2}}$ , ces extremas sont situés sur la frontière de cette boule.

**Exercice 2 :** Soit  $B \subset \mathbb{R}^3$  défini par  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \geq 0 \text{ et } y^2 + 2z^2 \leq e^{-x}\}$ . Pour  $T > 0$  on définit l'ensemble  $B_T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq x \leq T \text{ et } y^2 + 2z^2 \leq e^{-x}\}$ .

- a) Calculer le volume de  $B_T$  en fonction de  $T$ .
- b) En déduire que l'ensemble  $B$  a un volume fini que l'on précisera.

**Exercice 3 :** Soit  $D$  l'ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \text{ et } x^2 \leq y \leq 1\}$ . Soit  $\Gamma$  le bord de  $D$  orienté dans le sens direct. On désigne par  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et on définit la fonction  $f(x, y) = (y - x^2)g(x, y)$ .

- a) Montrer que  $\int_{\Gamma} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)g(x, 1) dx$
- b) En déduire que  $\int_D (g(x, y) + (y - x^2) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) dx dy = \int_{-1}^1 (1 - x^2)g(x, 1) dx$
- c) Utiliser ce résultat pour calculer  $\int_D (1 - 2(xy^2 - x^3y))e^{xy^2} dx dy$ .

## Corrigé Examen LM216

4 Juin 2009

**Exercice 1 :** a) Comme  $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \log(x^2 + y^2)$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \log(t) = 0$  quand  $t \rightarrow 0$  la continuité de  $f$  en découle.

b) Si  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existait elle serait égale à  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(x^2)$  mais cette limite vaut  $-\infty$  et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  n'existe pas. Il en est de même pour  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

c) On cherche  $(x, y) \neq (0, 0)$  solution des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \log(x^2 + y^2) + \frac{2x(x + y)}{x^2 + y^2} = 0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \log(x^2 + y^2) + \frac{2y(x + y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

En faisant la différence, on voit que  $(x + y)(x - y) = 0$ . Dans le cas  $x = -y$ , on obtient l'équation  $\log(2x^2) = 0$  soit  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On a donc les points critiques  $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  et  $B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Dans le cas  $x = y$ , on obtient l'équation  $\log(2x^2) = -2$ , soit  $x = \pm \frac{1}{e\sqrt{2}}$ . On a donc les points critiques  $C = (\frac{1}{e\sqrt{2}}, \frac{1}{e\sqrt{2}})$  et  $D = (-\frac{1}{e\sqrt{2}}, -\frac{1}{e\sqrt{2}})$ .

d) Le calcul des dérivées secondes donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2x^3 + 2y^3 + 6xy^2 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2y^3 + 2x^3 + 6yx^2 - 2y^2x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2(x + y)(x - y)^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On constate ainsi que la matrice hessienne aux points critique est diagonale. Il est alors aisé de vérifier que les termes diagonaux ont des signes opposés pour les points  $A$  et  $B$  qui sont donc des points selles, des signes positifs pour le point  $C$  qui est donc un minimum local, et des signes négatifs pour le point  $D$  qui est donc un maximum local.

e) Si  $f$  admettait un minimum local en  $(0, 0)$  il existerait  $\epsilon > 0$  tel que  $f(x, y) \geq 0$  pour  $|x| \leq \epsilon$  et  $|y| \leq \epsilon$ . Or en prenant par exemple  $(x, y) = (a, a)$  avec  $a = \min(\epsilon, \frac{1}{2})$  on obtient  $f(x, y) < 0$  d'où une contradiction. Un raisonnement similaire en prenant  $(x, y) = (-a, -a)$  montre que  $f$  ne peut pas admettre de maximum local.

f) La boule  $B(0, r)$  est un compact,  $f$  atteint donc son maximum et minimum global sur  $B(0, r)$ .

g) On a vu que les extremas ne peuvent pas être au point  $(0, 0)$ . Si ils se situaient dans le reste de l'intérieur de  $B(0, r)$ , il seraient alors des points critiques, donc les points  $C$  ou  $D$ . Mais ceci n'est pas possible si  $r \leq r_0$  car alors  $C$  et  $D$  ne sont pas à l'intérieur de la boule. Dans ce cas, les maximum et minimum globaux se situent donc nécessairement sur le bord de la boule.

**Exercice 2 :** Soit  $B \subset \mathbb{R}^3$  défini par  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \geq 0 \text{ et } y^2 + 2z^2 \leq e^{-x}\}$ . Pour  $T > 0$  on définit l'ensemble  $B_T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq x \leq T \text{ et } y^2 + 2z^2 \leq e^{-x}\}$ .

a) On peut écrire

$$|B_T| = \int_{B_T} dx dy dz = \int_0^T \left( \int_{E_x} dy dz \right) dx = \int_0^T |E_x| dx,$$

où  $|E_x|$  est l'aire de l'ellipse  $E_x := \{(y, z) ; y^2 + 2z^2 \leq e^{-x}\}$ . Un changement de variable  $u = \sqrt{2}z$  montre que si  $D_x := \{(y, u) ; y^2 + u^2 \leq e^{-x}\}$ .

$$|E_x| = \int_{E_x} dydz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{D_x} dydu = \frac{1}{\sqrt{2}} |D_x| = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-x}.$$

On obtient ainsi

$$|B_T| = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^T e^{-x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1 - e^{-T}).$$

b) En faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$  on voit que  $B_T$  reste borné et tend vers la limite finie  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . Par conséquent l'intégrale généralisée  $\int_B dx dy dz$  converge ce qui signifie que  $B$  a un volume fini  $|B| = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .

**Exercice 3 :** a) Le bord  $\Gamma$  se décompose en un segment  $S = \{(x, 1) ; -1 \leq x \leq 1\}$  et une portion de parabole  $P = \{(x, x^2) ; -1 \leq x \leq 1\}$ . On a donc  $\int_{\Gamma} f(x, y) dx = \int_S f(x, y) dx + \int_P f(x, y) dx$  en orientant  $S$  et  $P$  dans le sens correspondant au sens direct de  $\Gamma$ . On remarque que  $f(x, y) = 0$  quand  $(x, y) \in P$  et  $f(x, y) = (1 - x^2)g(x, 1)$  quand  $(x, y) \in S$  et donc

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dx = \int_S (x^2 - 1)g(x, 1) dx.$$

En utilisant la paramétrisation  $x \mapsto (-x, 1)$  pour  $x \in [-1, 1]$ , on obtient après changement de variable

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)g(x, 1) dx.$$

b) En appliquant la formule de Green-Riemann, on trouve

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)g(x, 1) dx = \int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_D (g(x, y) + (y - x^2) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) dx dy.$$

c) On remarque que  $(1 - 2(xy^2 - x^3y))e^{xy^2} = g(x, y) + (y - x^2) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  avec  $g(x, y) = e^{xy^2}$ . En appliquant la formule précédente on trouve

$$\int_D (1 - 2(xy^2 - x^3y))e^{xy^2} dx dy = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)e^x dx,$$

En appliquant deux intégration par parties on trouve la valeur  $2e - \frac{6}{e}$ .