Université Paris Dauphine
DEMI2E 2e année
Algèbre linéaire 3

Examen partiel du 14 novembre 2011

Le sujet comporte **2** pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré $\leq n$ et f l'application de E dans E définie par

$$f(P) = P + (1 - X)P'$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de l'application f.
3. Donner les dimensions du noyau et de l'image de l'application f.

Exercice 2

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = 2y = -z = t\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z - t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer leur dimension.
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 3

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y + z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donner leur dimension.
2. Déterminer l'ensemble $F \cap G$ et en donner une base.
3. Déterminer une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\{e_1, e_2\}$ soit une base de F et $\{e_2, e_3\}$ soit une base de G.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Cette somme est-elle directe ?

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ où l'application f^j est définie de proche en proche par $f^0(x) = x$ et $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$ pour tout $x \in E$ et tout entier $j \geq 0$.

Soit $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$. Montrer que la famille $\{f^j(e);\ j = 0, \dots, n-1\}$ est une base de E.

Exercice 5

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Montrer que les applications $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty\,.$$

Exercice 6

Pour f dans l'espace C des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles on pose

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 f(x)^2\, dx\Big)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que les applications $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur C et que pour tout f dans C on a

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty\,.$$

2. Pour chaque entier naturel k, soit f_k la fonction de C définie sur $[0,1]$ par $f_k(x) = x^k$. Calculer $\|f_k\|_2$ et $\|f_k\|_\infty$ pour chaque k.

3. En déduire qu'il n'existe pas de constante réelle c telle que

$$\|f\|_\infty \leq c\, \|f\|_2$$

pour toute fonction f de C.

Corrigé

Exercice 1.

1. On note tout d'abord que f est bien à valeurs dans E, car si P est un polynôme de degré $\leq n$, alors P' est un polynôme de degré $\leq n-1$ et donc $f(P)$ un polynôme de degré $\leq n$. De plus f est bien linéaire car pour λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et P, $Q \in E$ on a par la linéarité de la dérivation

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q + (1-x)(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q + (1-x)(\lambda P' + \mu Q') =$$
$$\lambda P + (1-x)(\lambda P') + \mu Q + (1-x)(\mu Q') = \lambda P + \lambda(1-x)P' + \mu Q + \mu(1-x)Q' =$$
$$\lambda(P + (1-x)P') + \mu(Q + (1-x)Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

2. Un polynôme P est tel que $f(P) = 0$ si et seulement si P vérifie l'équation différentielle

$$P + (1-X)P' = 0$$

dont la solution est $P = \lambda(X-1)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc le noyau Ker f de f est l'espace engendré par le seul polynôme $X-1$.

3. D'après la question 2, Ker f est de dimension 1. Par le théorème du rang, la dimension de l'image Im f de f est donnée par

$$\dim Imf = \dim E - \dim Kerf = (n+1) - 1 = n.$$

Exercice 2.

1. Les éléments de F sont de la forme $(2y, y, -2y, 2y)$ avec $y \in \mathbb{R}$. Ainsi, F est l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : y \mapsto (2y, y, -2y, 2y)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

L'ensemble G est le noyau de l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x, y, z, t) \to x+y-z-t$. C'est donc aussi un sous-espace vectoriel de E.

2. L'espace vectoriel F est l'espace engendré par le vecteur $(2, 1, -2, 2)$ donc est de dimension 1.

L'application linéaire g est surjective car pour tout réel α le vecteur $(\alpha, 0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ est tel que $g(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha$. Ainsi $Im\, g = \mathbb{R}$ et donc $\dim(Im\, g) = 1$. D'après le théorème du rang on a donc

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim\ Kerg + \dim\ Img = \dim\ Kerg + 1$$

et ainsi

$$\dim G = 3$$

puisque $G = Ker\, g$.

3. On montre d'abord que $\mathbb{R}^4 = F + G$. Pour cela étant donné $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on cherche Y, X', Y' et $Z' \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z, t) = (2Y, Y, -2Y, 2Y) + (X', Y', Z', X' + Y' - Z')$$

puisque $(2Y, Y, -2Y, 2Y) \in F$ et $(X', Y', Z', X' + Y' - Z') \in G$, soit

$$x = 2Y + X'$$
$$y = Y + Y'$$

$$z = -2Y + Z'$$
$$t = 2Y + X' + Y' - Z'$$

En particulier

$$Y = \frac{1}{3}(x + y - z - t)$$

puis $X' = x - 2Y$, $Y' = y - Y$ et $Z' = x + y - t - Y$ donnent une solution.

On montre ensuite que $F \cap G = \{0\}$. Pour cela, un élément e de $F \cap G$ s'écrit d'une part sous la forme $e = (2y, y, -2y, 2y)$ pour un $y \in \mathbb{R}$ et d'autre part il doit vérifier $g(e) = g(2y, y, -2y, 2y) = 2y + y + 2y - 2y = 3y = 0$. Donc $y = 0$ et par conséquent $e = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.

Ainsi $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Remarque : Pour montrer que $\mathbb{R}^4$ est somme directe de F et G, on peut alternativement montrer que $F \cap G = \{0\}$ et utiliser le fait que $dimF + dimG = 4 = dim\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.

1. Les sous-ensembles F et G sont les noyaux respectifs des applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to x - y + 2z$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to 2x + y + z$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Ces deux applications linéaires étant de plus surjectives (comme formes linéaires non nulles), on déduit du théorème du rang que

$$3 = \dim Imf + \dim Kerf = 1 + \dim F \qquad 3 = \dim Img + \dim Kerg = 1 + \dim G$$

donc

$$\dim\, F = \dim\, G = 2.$$

2. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel et ses éléments sont les triplets (x, y, z) solutions du système linéaire

$$x - y + 2z = 0$$
$$2x + y + z = 0.$$

Ces solutions sont de la forme $(\alpha, -\alpha, -\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Le sous-espace vectoriel $F \cap G$ est donc de dimension 1 et admet pour base par exemple le vecteur $(1, -1, -1)$.

3. On cherche à compléter $e_2 = (1, -1, -1)$ par deux vecteurs $e_1 \in F$ et $e_3 \in G$ convenables.

Le vecteur $e_1 = (1, 1, 0)$ appartient à F et n'est pas colinéaire à e_2. Ainsi $\{e_1, e_2\}$ est une famille libre de F, donc une base de F puisque F est de dimension 2.

Le vecteur $e_3 = (0, 1, -1)$ appartient à G et n'est pas colinéaire à e_2. Ainsi $\{e_2, e_3\}$ est une famille libre de G, donc une base de G puisque G est de dimension 2.

Pour prouver que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E, il suffit de montrer que cette famille est libre puisque E est de dimension 3. Or le système linéaire

$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3 = 0$$

aux 3 inconnues λ_1, λ_2 et λ_3, équivaut aux 3 équations

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$-\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

qui n'admet que la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre, donc une base de E.

4. Etant donné $x \in \mathbb{R}^3$, il existe λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ avec $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in F$ et $\lambda_3 e_3 \in G$. Ainsi $E = F + G$.

La somme n'est pas directe car par exemple le vecteur non nul e_2 appartient à $F \cap G$.

Exercice 4. On montre d'abord que la famille $\{f^j(e),\ j = 0 \dots, n-1\}$ est libre. Pour cela, soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 e + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0$. En appliquant l'application linéaire f^{n-1}, il vient $f^{n-1}(\lambda_0 e + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e)) = 0$.

Or d'une part $f^{n-1}(\lambda_0 e + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e)) = \lambda_0 f^{n-1}(e) + f^n(\lambda_1 e + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-2}(e))$ et d'autre part $f^n(y) = 0$ pour tout y.

Par conséquent $\lambda_0 f^{n-1}(e) = 0$ et comme $f^{n-1}(e) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.

En calculant ensuite $f^{n-2}(\lambda_1 \varphi(e) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. La famille $\{f^j(e),\ j = 0 \dots, n-1\}$ est donc libre.

Enfin comme elle compte n vecteurs et que $\dim E = n$, elle forme donc une base de E.

Exercice 5.

On a vu en cours que $\|.\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire euclidien

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pour montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on note tout d'abord que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty$ est le sup de n nombres positifs, donc est positif.

D'autre part, si $x = 0$, alors toutes ses coordonnées sont nulles et donc $\|x\|_\infty = 0$; inversement, si $\|x\|_\infty = 0$, alors $\sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = 0$, donc $|x_i| \leq 0$ pour tout i, c'est-à-dire $x_i = 0$, et donc $x = 0$: ainsi $\|x\|_\infty = 0$ ssi $x = 0$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: alors

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |\lambda x_i| = \sup_{i=1,\dots,n} |\lambda|\,|x_i| = |\lambda| \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = |\lambda|\ \|x\|_\infty.$$

Soit enfin $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| + \sup_{i=1,\dots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Comme ceci est vrai pour tout i on en déduit que $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Ainsi $\|.\|_\infty$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Les inégalités de comparaison entre normes ont été vues en cours.

Exercice 6.

1. On a vu en cours que $< .,. >$ défini sur $C \times C$ par

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

est un produit scalaire. $\|.\|_2$ est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur C, on note tout d'abord qu'une fonction f de C est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$, donc y est bornée : en particulier $\|f\|_\infty$ est bien défini, et est positif.

D'autre part, si $f = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout x et donc $\|f\|_\infty = 0$; inversement, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\sup_x |f(x)| = 0$, donc $|f(x)| \leq 0$ pour tout x, c'est-à-dire $f(x) = 0$, et donc $f = 0$: ainsi $\|f\|_\infty = 0$ ssi $f = 0$.

Soit maintenant $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: alors

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_x |\lambda f(x)| = \sup_x |\lambda|\, |f(x)| = |\lambda| \sup_x |f(x)| = |\lambda|\, \|f\|_\infty.$$

Soit enfin $f, g \in C$. Alors pour tout $x \in [0, 1]$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_x |f(x)| + \sup_x |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in [0, 1]$ on en déduit que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ainsi $\|.\|_\infty$ est bien une norme sur C.

2. Pour chaque k la fonction f_k est bien une fonction continue sur $[0, 1]$. De plus

$$\|f_k\|_2 = \Big(\int_0^1 x^{2k} dx \Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

et

$$\|f_k\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} x^k = 1.$$

3. Supposons par l'absurde qu'il existe une constante réelle c telle que

$$\|f\|_\infty \leq c\, \|f\|_2$$

pour toute fonction f de C. En particulier, pour chaque k, et pour la fonction f_k,

$$\|f_k\|_\infty \leq c\, \|f_k\|_2,$$

c'est-à-dire

$$1 \leq \frac{c}{\sqrt{2k+1}}$$

soit $c \geq \sqrt{2k+1}$. Ceci est impossible car aucun réel n'est plus grand que tous les $\sqrt{2k+1}$ pour k entier. On aboutit donc à une contradiction, et il n'existe donc pas de tel réel c.