

EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Lundi 17 septembre 2007, 14h-17h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Veuillez utiliser des feuilles **blanches** pour la question de cours et l'exercice 1, des feuilles **jaunes** pour les exercices 2 et 3, et des feuilles **vertes** pour les exercices 4, 5 et 6.

Question de cours

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Rappeler la définition de sous-espace vectoriel de V .
2. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux sous-espaces de V , alors l'intersection $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de V .

Exercice 1 Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x, y, z sont trois réels.

A l'aide d'un calcul de déterminant, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système $\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}$.

On considère le $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel E de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $f : x \mapsto \exp(x)$ (exponentielle) et $g : x \mapsto \exp(-x)$.

On considère le $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $c : x \mapsto \cosh(x)$ (cosinus hyperbolique) et $s : x \mapsto \sinh(x)$ (sinus hyperbolique).

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{f, g\}$ est libre.

Remarque : $\{f, g\}$ est donc une base de l'espace vectoriel E .

2. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{c, s\}$ est libre.

Remarque : $\{c, s\}$ est donc une base de l'espace vectoriel F .

3. Montrer que $c \in E$ et que $s \in E$.

Remarque : on déduit que $F \subset E$.

4. Montrer que $E = F$.

5. Donner la matrice de passage P de la base $\{f, g\}$ dans la base $\{c, s\}$.

6. Exprimer la fonction $u : x \mapsto 2 \cosh(x) - 3 \sinh(x)$ dans la base $\{f, g\}$.

7. Exprimer la fonction $v : x \mapsto 2 \exp(x) - 3 \exp(-x)$ dans la base $\{c, s\}$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z),$$

$$g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad g(e_2) = e_2 + e_3, \quad g(e_3) = e_3.$$

1. Donner les matrices M_f et M_g de f et g dans la base $\mathcal{B}$.

2. Donner l'image de $\mathcal{B}$ par l'application linéaire $h = f - g$.

3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - z, x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer $\ker(f)$.

3. Déterminer $\text{Im}(f)$.

4. Énoncer le théorème de rang. L'appliquer à f .

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.

Exercice 6 Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels a et m :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - mx_2 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Lundi 17 septembre 2007, 14h-17h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Veuillez utiliser des feuilles **blanches** pour la question de cours et l'exercice 1, des feuilles **jaunes** pour les exercices 2 et 3, et des feuilles **vertes** pour les exercices 4, 5 et 6.

Question de cours

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Rappeler la définition de sous-espace vectoriel de V .

Une partie non vide W de V est un sous-espace vectoriel de V si c'est une partie stable pour les deux lois de V ; c'est alors un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois induites.

2. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux sous-espaces de V , alors l'intersection $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de V .

Notons $+$ et $\cdot$ les deux lois de V (i.e. on considère l'espace vectoriel $(V, +, \cdot)$).

- $0 \in W_1$ et $0 \in W_2$, donc $0 \in W_1 \cap W_2$ et $W_1 \cap W_2$ est non vide.
- Soit $x \in W_1 \cap W_2$ et $y \in W_1 \cap W_2$. On déduit $x \in W_1$ et $y \in W_1$ puis $x + y \in W_1$ (car W_1 est un sous-espace vectoriel de V). De même, $x \in W_2$ et $y \in W_2$ puis $x + y \in W_2$ (car W_2 est un sous-espace vectoriel de V). D'où $x + y \in W_1 \cap W_2$ et $W_1 \cap W_2$ est stable pour $+$.
- Soit $x \in W_1 \cap W_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On déduit $x \in W_1$ et comme $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in W_1$ (car W_1 est un sous-espace vectoriel de V). De même, $x \in W_2$ et comme $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in W_2$ (car W_2 est un sous-espace vectoriel de V). D'où $\lambda \cdot x \in W_1 \cap W_2$ et $W_1 \cap W_2$ est stable pour $\cdot$.

Ainsi, $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V .

Solution 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} \neq 0,$$

équivalent à ce que le système $\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

En application de la règle de Sarrus, on obtient :

$$y + 2z \neq 0 \iff \beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

Solution 2

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{f, g\}$ est libre.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \exp(x) + \mu \exp(-x) = 0$, d'où en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient que $\lambda = 0$ et en faisant tendre x vers $-\infty$, on obtient que $\mu = 0$ et l'ensemble des fonctions $\{f, g\}$ est libre.

Remarque : $\{f, g\}$ est donc une base de l'espace vectoriel E .

2. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{c, s\}$ est libre.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cosh(x) + \mu \sinh(-x) = 0$, d'où en posant $x = 0$, on obtient que $\lambda = 0$ et en dérivant puis posant $x = 0$, on obtient que $\mu = 0$ et l'ensemble des fonctions $\{c, s\}$ est libre.

Remarque : $\{c, s\}$ est donc une base de l'espace vectoriel F .

3. Montrer que $c \in E$ et que $s \in E$.

$$c = \frac{f+g}{2} \in E \text{ et } s = \frac{f-g}{2} \in E \text{ et on déduit que } F \subset E.$$

4. Montrer que $E = F$.

$$f = c + s \in F \text{ et } g = c - s \in F \text{ et on déduit que } E \subset F.$$

De $F \subset E$ et $E \subset F$, on conclut que $E = F$.

5. Donner la matrice de passage P de la base $\{f, g\}$ dans la base $\{c, s\}$.

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Exprimer la fonction $u : x \mapsto 2 \cosh(x) - 3 \sinh(x)$ dans la base $\{f, g\}$.

$$\begin{aligned} 2 \cosh(x) - 3 \sinh(x) &= 2 \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} - 3 \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \exp(x) + \frac{5}{2} \exp(-x) \\ u &= -\frac{1}{2} f + \frac{5}{2} g \end{aligned}$$

7. Exprimer la fonction $v : x \mapsto 2 \exp(x) - 3 \exp(-x)$ dans la base $\{c, s\}$.

$$\begin{aligned} 2 \exp(x) - 3 \exp(-x) &= 2(\cosh(x) + \sinh(x)) - 3(\cosh(x) - \sinh(x)) \\ &= -\cosh(x) + 5 \sinh(x) \\ v &= -c + 5s \end{aligned}$$

Solution 3

1. Donner les matrices M_f et M_g de f et g dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $h = f - g$,

$$M_h = M_f - M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Donner l'image de $\mathcal{B}$ par l'application linéaire $h = f - g$.

$$h(e_1) = -e_2 - e_3, \quad h(e_2) = e_1 - e_3, \quad h(e_3) = e_1 + e_2.$$

3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$h(x, y, z) = (y + z, -x + z, -x - y).$$

Solution 4 Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - z, x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, \forall (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 - z_1) + \mu(x_2 - z_2), \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 - z_1), \lambda(x_1 + y_1)) + (\mu(x_2 - z_2), \mu(x_2 + y_2)) \\ &= \lambda(x_1 - z_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2 - z_2, x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1, z_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

2. Déterminer $\ker(f)$.

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } f(x, y, z) = (0, 0)\}.$$

$$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff x = -y = z.$$

$$\ker(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle.$$

3. Déterminer $\text{Im}(f)$.

$$\text{Im}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } f(x, y, z) = (a, b)\}.$$

$$f(x, y, z) = (a, b) \iff \begin{cases} x - z = a \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} z = x - a \\ y = b - x \end{cases}.$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle.$$

4. Énoncer le théorème de rang. L'appliquer à f .

$$\underbrace{\dim(\ker(f))}_{=1} + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{=2} = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3}.$$

Solution 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Calcul du discriminant réduit : $\Delta' = -12$. Les racines sont donc $-2 + 2i\sqrt{3}$ et $-2 - 2i\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.

On pose $Z = z^4$, l'équation devient alors $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Premier cas : $z^4 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Une racine évidente est $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{6}}$. L'ensemble des racines s'obtient en multipliant cette racine évidente par chacune des racines quatrièmes de l'unité.

Puis, l'ensemble des racines est $\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{6}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{7i\pi}{6}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{5i\pi}{3}}\}$.

Second cas : $z^4 = -2 - 2i\sqrt{3} = 4e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

Une racine évidente est $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$. L'ensemble des racines s'obtient en multipliant cette racine évidente par chacune des racines quatrièmes de l'unité.

Puis, l'ensemble des racines est $\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{11i\pi}{6}}\}$.

Conclusion : l'ensemble des racines de l'équation $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$ est

$$\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{6}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{7i\pi}{6}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{5i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{11i\pi}{6}}\}.$$

Solution 6

Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels a et m :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - mx_2 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 2.$$

- Si $m \neq -2$, le système est dit de Cramer et admet une solution unique.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ a & -m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -m & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 2 - a.$$

et

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2a}{m+2} ; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-a}{m+2} ; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{m+2-a}{m+2}.$$

- Si $m = -2$, le système devient

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 & [L_1] \\ x_1 + 2x_2 = a & [L_2] \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 & [L_3] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 & [L_1] \\ x_1 + 2x_2 = a & [L_2] \\ 0 = a & [L_1 + L_2 - 2L_3] \end{cases}.$$

- Si $a = 0$, le système équivaut à

$$\begin{cases} x_3 = \frac{2-x_1}{2} & [L_1] \\ x_2 = \frac{a-x_1}{2} & [L_2] \end{cases}.$$

En d'autres termes,

$$(x_1, x_2, x_3) \in \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_A + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\vec{u}},$$

ou la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est solution.

- Si $a \neq 0$, il n'y a pas de solution.