

## Suites et séries de fonctions

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

### Exercice 1

---

Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

1) (\*\*\*)  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$    2) (\*\*\*)  $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$    3) (\*\*\*)  $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ .

[Correction ▼](#)

[005726]

### Exercice 2 \*\*\* I

---

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$ .

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction  $f : x \mapsto e^{-x}$ .
2. A l'aide de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , calculer l'intégrale de GAUSS  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

[Correction ▼](#)

[005727]

### Exercice 3 \*\*\* I Polynômes de BERNSTEIN. Théorème de WEIERSTRASS

---

Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $n$  entier naturel non nul, on définit le  $n$ -ème polynôme de BERNSTEIN associé à  $f$  par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. (a) Calculer  $B_n(f)$  quand  $f$  est la fonction  $x \mapsto 1$ , quand  $f$  est la fonction  $x \mapsto x$ , quand  $f$  est la fonction  $x \mapsto x(x-1)$ .  
(b) En déduire que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$ .
2. En séparant les entiers  $k$  tels que  $|x - \frac{k}{n}| > \alpha$  et les entiers  $k$  tels que  $|x - \frac{k}{n}| \leq \alpha$  ( $\alpha > 0$  donné), montrer que la suite de polynômes  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
3. Montrer le théorème de WEIERSTRASS : soit  $f$  une application continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de polynômes.

[Correction ▼](#)

[005728]

### Exercice 4 \*\* I

---

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes convergeant uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ . Montrer que  $f$  est un polynôme.

[Correction ▼](#)

[005729]

### Exercice 5 \*\*

---

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] - 1, 1[$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et en déduire que  $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1-x \cos x}\right)$ .

Correction ▼

[005730]

### Exercice 6 \*\*

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ .

1. Domaine de définition de  $f$ . On étudie ensuite  $f$  sur  $]1, +\infty[$ .
2. Continuité de  $f$  et limites de  $f$  en 1 et  $+\infty$ .
3. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et dresser son tableau de variation.

Correction ▼

[005731]

### Exercice 7 \*\*

Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

1.  $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$  sur  $\mathbb{R}^+$
2.  $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3 x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$
3.  $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}$ .

Correction ▼

[005732]

### Exercice 8 \*\* I

Montrer que pour tout réel  $a > 0$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^a} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$ .

Correction ▼

[005733]

### Exercice 9 \*\*

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ .

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général  $f_n$  puis la continuité de la somme  $f$ .
2. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$  à l'aide de la formule de STIRLING.

Correction ▼

[005734]

### Exercice 10 \*\*

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $f_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$ .

Etude complète de  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  : domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que  $f$  n'est pas dérivable en 0), allure du graphe.

Correction ▼

[005735]

### Exercice 11 \*\*

Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ . Trouver un équivalent simple de  $f$  en 0 à droite.

Correction ▼

[005736]

### Exercice 12 \*\*\*

Pour  $x \in ] - 1, 1[$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ . Trouver un équivalent simple de  $f$  en 1.

Correction ▼

[005737]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et impaire.

**Convergence simple sur  $\mathbb{R}$ .** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x = 0$ , pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_n(x) = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .
- Si  $x \neq 0$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$  et de nouveau  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle.

**Convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .** On peut noter tout de suite que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  et donc  $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ . On en déduit que  $\|f_n\|_\infty$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle.

Si on n'a pas remarqué ce qui précède, on étudie la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$  ( $f_n$  étant impaire) dans le but de déterminer  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0|$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et pour tout réel positif  $x$ ,  $f'_n(x) = n \frac{(1+n^2x^2) - x(n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$ . Par suite, la fonction  $f_n$  est croissante sur  $[0, \frac{1}{n}]$  et décroissante sur  $[\frac{1}{n}, +\infty[$ .

Puisque la fonction  $f_n$  est positive sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  qui ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

**Convergence uniforme et localement uniforme sur  $]0, +\infty[$ .** La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge toujours pas uniformément vers la fonction nulle sur  $]0, +\infty[$  car pour  $n \geq 1$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$ .

Soit  $a$  un réel strictement positif fixé. Soit  $n > \frac{1}{a}$ . On a  $0 < \frac{1}{n} < a$  et donc la fonction  $f_n$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ . Par suite, pour tout réel  $x$  de  $[a, +\infty[$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$ .

Donc  $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0| = f_n(a)$  pour  $n > \frac{1}{a}$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0| = 0$ . Donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  où  $a > 0$  et en particulier converge localement uniformément vers la fonction nulle sur  $]0, +\infty[$  mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $]0, +\infty[$ .

2. **Convergence simple sur  $\mathbb{R}$ .** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On sait que  $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  et donc la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction constante  $f : x \mapsto 1$ .

**Convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^+$ .**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ . Par suite, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $|f_n - f|$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ . La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge donc pas uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 1$  et donc  $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$ . La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge donc pas uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Convergence localement uniforme sur  $\mathbb{R}$ .** Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $g_n = f_n - f$ . La fonction  $g_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$

$$g'_n(x) = e^{-x} \left( -\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) = -\frac{e^{-x}x^n}{n!}.$$

Si  $n$  est pair, la fonction  $g_n$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et s'annule en 0.

Si  $n$  est impair, la fonction  $g_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}^-$ , décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  et s'annule en 0.

Dans les deux cas, si  $x \in [a, b]$ ,  $|g_n(x)| \leq \text{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\}$  avec égalité effectivement obtenue pour  $x = a$  ou  $x = b$ . Donc

$$\sup_{x \in [a, b]} |g_n(x)| = \text{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\} = \frac{g_n(a) + g_n(b) + |g_n(a) - g_n(b)|}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $[a, b]$  contenu dans  $\mathbb{R}$  ou encore

la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge localement uniformément vers la fonction  $f : x \mapsto 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. Pour  $x$  réel et  $n$  entier naturel, on pose  $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .

**Convergence simple.** Soit  $x$  réel fixé.  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x \in 2\mathbb{Z}$ . Dans ce cas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

Si  $x \notin 2\mathbb{Z}$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\Leftrightarrow$  la suite  $(n(1-x)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\Leftrightarrow |1-x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ . Dans ce cas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

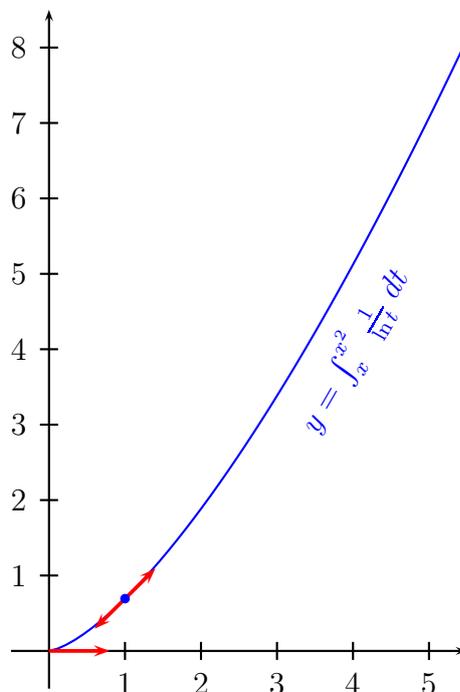
La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 2] \cup 2\mathbb{Z}$ .

**Convergence uniforme sur  $[0, 2]$ .** Soit  $n$  un entier naturel non nul fixé.

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - 0| \geq |f_n\left(\frac{1}{n}\right)| = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Cette dernière expression est équivalente à  $\frac{\pi}{2e}$  en  $+\infty$  et en particulier ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 2]$ .



La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 2]$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

**Convergence simple sur  $\mathbb{R}^+$ .** Soit  $x$  un réel positif fixé. Pour  $n > x$ ,  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$  et donc

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(-x + o(1)).$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction  $f : x \mapsto e^{-x}$ .

**Convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .** Pour  $x$  réel positif et  $n$  entier naturel non nul, posons  $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ e^{-x} & \text{si } x > n \end{cases}$ . Déterminons la borne supérieure de la fonction  $|g_n|$  sur  $[0, +\infty[$ .

La fonction  $g_n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour  $x \geq n$ ,  $0 < g_n(x) \leq e^{-n} = g_n(n)$ .

Étudions la fonction  $g_n$  sur  $[0, n]$ . Pour  $x \in [0, n]$ ,  $g'_n(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$ . ( $g'_n(n)$  est la dérivée à gauche de la fonction  $g_n$  en  $n$ , mais on peut montrer qu'en fait la fonction  $g_n$  est dérivable en  $n$  pour  $n > 1$ ).

La fonction  $g_n$  est continue sur le segment  $[0, n]$  et admet donc sur  $[0, n]$  un minimum et un maximum.

• La fonction  $g_n$  a un minimum égal à 0 atteint en 0. En effet, on sait que pour tout réel  $u$ ,  $e^u \geq 1 + u$  (inégalité de convexité) et donc pour tout réel  $x$  de  $[0, n]$ ,  $e^{-x/n} \geq 1 - \frac{x}{n} \geq 0$ . Après élévation des deux membres de cette inégalité, par croissance de  $t \mapsto t^n$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient  $e^{-x} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$  ou encore  $g_n(x) \geq 0 = g_n(0)$ .

• Pour  $0 < x \leq n$ , les inégalités précédentes sont strictes et la fonction  $g_n$  admet son maximum dans  $]0, n[$ . De plus,  $g'_n(n) = -e^{-n} < 0$  et puisque la fonction  $g_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, n]$ , sa dérivée  $g'_n$  est strictement négative sur un voisinage à gauche de  $n$ . La fonction  $g_n$  est alors strictement décroissante sur ce voisinage et la fonction  $g_n$  admet nécessairement son maximum sur  $\mathbb{R}^+$  en un certain point  $x_n$  de  $]0, n[$ . En un tel point, puisque l'intervalle  $]0, n[$  est ouvert, on sait que la dérivée de la fonction  $g_n$  s'annule. L'égalité  $g'_n(x_n) = 0$  fournit  $\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$  et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) e^{-x_n} = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En résumé, pour tout réel positif  $x$ ,  $0 \leq g_n(x) \leq \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$  où  $x_n$  est un certain réel de  $]0, n[$ .

Pour  $u$  réel positif, posons  $h(u) = ue^{-u}$ . La fonction  $h$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $u \geq 0$ ,  $h'(u) = (1 - u)e^{-u}$ . Par suite, la fonction  $h$  admet un maximum en 1 égal à  $\frac{1}{e}$ . On a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{ne}$$

ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup\{|g_n(x)|, x \geq 0\} \leq \frac{1}{ne}$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|g_n(x)|, x \geq 0\} = 0$  et on a montré que

la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction  $x \mapsto e^{-x}$ .

**Existence de  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .** La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et négligeable devant  $\frac{1}{x^2}$  en  $+\infty$ .

Donc la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Par suite,  $I$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

On est alors en droit d'espérer que  $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x^2) dx$ .

La fonction  $x \mapsto f_n(x^2)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et nulle sur  $[\sqrt{n}, +\infty[$ . Donc la fonction  $x \mapsto f_n(x^2)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ .

Montrons que  $I_n$  tend vers  $I$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

$$|I - I_n| \leq \int_0^{\sqrt{n}} |f(x^2) - f_n(x^2)| dx + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \times \frac{1}{ne} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{e\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Puisque la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , cette dernière expression tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = I$ .

**Calcul de la limite de  $I_n$ .** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les changements de variables  $x = u\sqrt{n}$  puis  $u = \cos v$  fournissent

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^1 (1 - u^2)^n du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} v dv = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

où  $W_n$  est la  $n$ -ème intégrale de WALLIS. On a déjà vu (exercice classique, voir fiches de Maths Sup) que  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  et donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement,  $I_n$  tend vers  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Vous pouvez voir différents calculs de l'intégrale de GAUSS dans « Grands classiques de concours : intégration ».

1. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

• Si  $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1$ ,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

• Si  $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$ ,

$$\begin{aligned} B_n(f) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} = X. \end{aligned}$$

• Si  $\forall x \in [0, 1], f(x) = x(x-1)$ , alors  $B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1-X)^{n-k}$  et donc  $B_1(f) = 0$ .

Pour  $n \geq 2$  et  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$\frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) \binom{n}{k} = -\frac{1}{n^2} k(n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} = -\frac{n-1}{n} \frac{(n-2)!}{(k-1)(n-k-1)!} = -\frac{n-1}{n} \binom{n-2}{k-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} B_n(f) &= -\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=1}^{n-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-2)-(k-1)} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^k (1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X). \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour  $n = 1$ .

(b) D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 X^k (1-X)^{n-k} - 2nX \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-n) X^k (1-X)^{n-k} - n(2X-1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} \\ &\quad + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} - n^2 (2X-1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \\ &= -n(n-1)X(1-X) - n^2(2X-1)X + n^2 X^2 = -nX^2 + nX = nX(1-X). \end{aligned}$$

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $\alpha$  un réel strictement positif donné. Soit  $x$  un réel de  $[0, 1]$ .

Notons  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des entiers  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tels que  $|x - \frac{k}{n}| < \alpha$  (resp.  $|x - \frac{k}{n}| \geq \alpha$ ). (Si  $A$  ou  $B$  sont vides, les sommes ci-dessous correspondantes sont nulles).

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

$f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Par suite, il existe  $\alpha > 0$  tel que si  $x$  et  $y$  sont deux réels de  $[0, 1]$  tels que  $|x - y| < \alpha$  alors  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $\alpha$  est ainsi dorénavant fixé. Pour ce choix de  $\alpha$ ,

$$\sum_{k \in A} \binom{n}{k} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et donc est bornée sur ce segment. Soit  $M$  un majorant de la fonction  $|f|$  sur  $[0, 1]$ .

$$\sum_{k \in B} \binom{n}{k} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Mais si  $k \in B$ , l'inégalité  $|x - \frac{k}{n}| \geq \alpha$  fournit  $1 \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} (k - nx)^2$  et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq 1 \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in B} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 n^2} \times nx(1-x) = \frac{1}{\alpha^2 n} \left( \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}. \end{aligned}$$

En résumé, pour tout réel  $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \times \frac{1}{4\alpha^2 n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\alpha^2 n}.$$

Maintenant, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{2\alpha^2 n} = 0$ , il existe un entier naturel non nul  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\frac{M}{2\alpha^2 n} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pour  $n \geq N$ , on a  $|f(x) - B_n(f)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], (n \geq N \Rightarrow |f(x) - (B_n(f))(x)| < \varepsilon,$$

et donc que

la suite de polynômes  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $f$ .

3. La question 2) montre le théorème de WEIERSTRASS dans le cas du segment  $[0, 1]$ .

Soient  $[a, b]$  un segment quelconque et  $f$  un application continue sur  $[a, b]$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , posons  $g(x) = f(a + (b - a)x)$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc il existe une suite de polynômes  $(P_n)$  convergeant uniformément vers  $g$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $Q_n = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N \geq 1$  tel que  $\forall n \geq N, \forall y \in [0, 1], |g(y) - P_n(y)| < \varepsilon$ .

Soient  $x \in [a, b]$  et  $n \geq N$ . Le réel  $y = \frac{x-a}{b-a}$  est dans  $[0, 1]$  et

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(a + (b - a)y) - Q_n(a + (b - a)y)| = |g(y) - P_n(y)| < \varepsilon.$$

Ceci démontre que la suite de polynômes  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $[a, b]$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Posons  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ .

Le critère de CAUCHY de convergence uniforme (appliqué à  $\varepsilon = 1$ ) permet d'écrire

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall m \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_m(x)| \leq 1.$$

Pour  $n \geq N$ , les polynômes  $P_n - P_N$  sont bornés sur  $\mathbb{R}$  et donc constants. Par suite, pour chaque  $n \geq N$ , il existe  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $P_n - P_N = a_n$  (\*). Puisque la suite  $(P_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , la suite  $(a_n) = (P_n(0) - P_N(0))$  converge vers un réel que l'on note  $a$ . On fait alors tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'égalité (\*) et on obtient

$$f = P_N - a$$

On a montré que  $f$  est un polynôme.

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Pour  $x \in ]-1, 1[$  et  $n$  entier naturel non nul, posons  $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ .

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour  $n$  entier naturel non nul,  $|f_n(x)| \leq |x|^n$ . Or, la série géométrique de terme général  $|x|^n$ ,  $n \geq 1$ , est convergente et donc la série numérique de terme général  $f_n(x)$  est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que  $f(x)$  existe.

$f$  est définie sur  $]-1, 1[$ .

Soit  $a \in ]0, 1[$ . Chaque  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , est de classe  $C^1$  sur  $[-a, a]$  et pour  $x \in [-a, a]$ ,

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour  $x \in [-a, a]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|f'_n(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général  $2a^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , converge, la série de fonctions de terme général  $f'_n$ ,  $n \geq 1$ , est normalement et donc uniformément sur  $[-a, a]$ .

En résumé,

- la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , converge simplement vers  $f$  sur  $[-a, a]$ ,
- chaque fonction  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , est de classe  $C^1$  sur  $[-a, a]$ ,
- la série de fonctions de terme général  $f'_n$  converge uniformément sur  $[-a, a]$ .

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-a, a]$  pour tout réel  $a$  de  $]0, 1[$  et donc sur  $]-1, 1[$  et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$f$  est de classe  $C^1$  sur  $]-1, 1[$  et  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx))$ .

2. Ainsi, pour  $x \in ]-1, 1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx} \right) + \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix}(1 - xe^{-ix})}{x^2 - 2x \cos x + 1} \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{xe^{ix}(1 - xe^{-ix})}{x^2 - 2x \cos x + 1} \right) \\ &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{x^2 - 2x \cos x + 1}. \end{aligned}$$

Mais, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + x \cos x)(1 - x \cos x) - x \sin x (-\cos x + x \sin x)}{(1 - x \cos x)^2} = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2}.$$

et donc

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{Arctan} \left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right) \right)' &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2} \times \frac{1}{1 + \left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)^2} = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2 + x^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{x^2 - 2x \cos x + 1} = f'(x). \end{aligned}$$

Finalement, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = 0 + \operatorname{Arctan} \left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right).$$

$\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n} = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)$ .

## Correction de l'exercice 6 ▲

1. Pour  $n$  entier naturel non nul, on note  $f_n$  la fonction  $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si chaque  $f_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , existe et la série numérique de terme général  $f_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , converge.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x)$  existe si et seulement si  $x > 0$  et  $x \neq \frac{1}{n}$ .

Soit donc  $x \in D = ]0, +\infty[ \setminus \left\{ \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

Pour  $n > \frac{1}{x}$ , on a  $\ln(nx) > 0$ . On en déduit que la suite  $\left( \frac{1}{\ln(nx)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est positive et décroissante à partir d'un certain et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, la série numérique de terme général  $f_n(x)$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc  $f(x)$  existe.

Le domaine de définition de  $f$  est  $D = ]0, +\infty[ \setminus \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

2. **Limite de  $f$  en  $+\infty$ .** Soit  $x > 1$ . Donc  $f(x)$  existe. Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\ln(nx) > 0$ . On en déduit que la suite  $\left( \frac{1}{\ln(nx)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. On sait alors que la valeur absolue de  $f(x)$  est majorée par la valeur absolue du premier terme de la série. Ainsi

$$\forall x > 1, |f(x)| \leq \left| \frac{(-1)^0}{\ln(x)} \right| = \frac{1}{\ln x},$$

et en particulier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On peut noter de plus que pour  $x > 1$ ,  $f(x)$  est du signe du premier terme de la série à savoir  $\frac{1}{\ln(x)}$  et donc  $\forall x \in ]1, +\infty[, f(x) > 0$ .

**Convergence uniforme sur  $]1, +\infty[$ .** D'après une majoration classique du reste à l'ordre  $n$  alternée d'une série alternée, pour  $x > 1$  et  $n$  naturel non nul,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(kx)} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)} \right| = \frac{1}{\ln((n+1)x)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel non nul,  $\sup_{x \in ]1, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in ]1, +\infty[} |R_n(x)| = 0$ . La série de fonctions de terme général  $f_n$  converge uniformément vers sa somme sur  $]1, +\infty[$ .

**Continuité sur  $]1, +\infty[$ .** Chaque fonction  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  est continue sur  $]1, +\infty[$  et donc  $f$  est donc continue sur  $]1, +\infty[$  en tant que limite uniforme sur  $]1, +\infty[$  d'une suite de fonctions continues sur  $]1, +\infty[$ .

$f$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .

**Limite en 1 à droite.** Soit  $n \geq 2$ . Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures,  $f_n(x)$  tend vers  $\ell_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ . Puisque la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \geq 2$ , converge uniformément vers sa somme sur  $]1, +\infty[$ , le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$  converge et que la fonction  $x \mapsto f(x) - \frac{1}{\ln x} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$  tend vers le réel  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures ou encore

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + O(1) \text{ et en particulier, } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

3. La série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , converge simplement vers la fonction  $f$  sur  $]1, +\infty[$ . De plus chaque fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 1$ ,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}.$$

Il reste à vérifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général  $f'_n$  sur  $]1, +\infty[$ .

Soit  $x > 1$ . La série de terme général  $f'_n(x)$  est alternée car son terme général est alterné en signe et sa valeur absolue à savoir  $\frac{1}{x \ln^2(nx)}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$  en décroissant. Donc, d'après une majoration classique du reste à l'ordre  $n$  d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x \ln^2(kx)} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{x \ln^2((n+1)x)} \right| = \frac{1}{x \ln^2((n+1)x)} \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)}.$$

Par suite,  $\sup_{x \in ]1, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in ]1, +\infty[} |R_n(x)| = 0$ . Ainsi, la série de fonctions de terme général  $f'_n$ ,  $n \geq 1$ , converge uniformément sur  $]1, +\infty[$ .

En résumé,

- la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , converge simplement vers  $f$  sur  $]1, +\infty[$ ,
- chaque fonction  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ ,
- la série de fonctions de terme général  $f'_n$  converge uniformément sur  $]1, +\infty[$ .

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]1, +\infty[ \text{ et } \forall x > 1, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}.$$

Pour  $x > 1$ , puisque la série de somme  $f'(x)$  est alternée,  $f'(x)$  est du signe du premier terme de la somme à savoir  $-\frac{1}{x \ln^2 x}$ . Par suite,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $f'(x) \leq 0$  et  $f$  est donc strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

La fonction  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

## Correction de l'exercice 7 ▲

1. **Convergence simple.** Chaque fonction  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et la série de terme général  $f_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , diverge grossièrement.
- Si  $x = 0$ , puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = f_n(0) = 0$ , la série de terme général  $f_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge.
- Si  $x > 0$ ,  $n^2 f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Dans ce cas aussi, la série de terme général  $f_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge.

La série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Convergence normale.** La fonction  $f_0$  est la fonction nulle. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et pour tout réel positif  $x$ ,

$$f'_n(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

La fonction  $f_n$  est positive sur  $[0, +\infty[$ , croissante sur  $\left[0, \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ . On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Par suite, la série numérique de terme général  $\|f_n\|_\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , diverge grossièrement et donc

La série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $a > 0$ . Pour  $n \geq \frac{4}{a^2}$ , on a  $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq a$  et donc la fonction  $f_n$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ . Soit donc  $n$  un entier supérieur ou égal à  $\frac{4}{a^2}$ . Pour tout réel  $t$  supérieur ou égal à  $a$ , on a  $|f_n(t)| = f_n(t) \leq f_n(a)$  et donc

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(t)| = f_n(a).$$

Comme la série numérique de terme général  $f_n(a)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge, la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

Pour tout  $a > 0$ , la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , converge normalement et uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

**Convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$ .** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geq f_{n+1}(t),$$

et donc  $\sup_{t \in [0, +\infty[} |R_n(t)| \geq \sup_{t \in [0, +\infty[} |f_{n+1}(t)| 4e^{-2}$ . Par suite,  $\sup_{t \in [0, +\infty[} |R_n(t)|$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc

la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. **Convergence simple.** Chaque fonction  $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ , est définie sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . Puisque  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2} > 0$ , la série numérique de terme général  $f_n(x)$  converge. Donc

la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ , converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

**Convergence normale.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est décroissante et positive sur  $]0, +\infty[$ . Donc  $\sup_{x \in ]0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$ . Puisque la série numérique de terme général  $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ , diverge

la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ , ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $a > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est décroissante et positive sur  $5a, +\infty[$  et donc  $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$ .

Comme la série numérique de terme général  $f_n(a), n \in \mathbb{N}^*$ , converge, la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

Pour tout  $a > 0$ , la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ , converge normalement et uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

3. **Convergence simple.** Chaque fonction  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , est définie sur  $\mathbb{R}$  et impaire. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

• Si  $x = 0$ , pour tout entier naturel  $n, f_n(x) = f_n(0) = 0$ . Dans ce cas, la série numérique de terme général  $f_n(x)$  converge.

• Si  $x > 0$ , la suite  $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de premier  $x > 0$  et de raison  $\frac{1}{x^2+1} \in ]0, 1[$ . On en déduit que la suite  $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive décroissante de limite nulle. Par suite, la série numérique de terme général  $f_n(x)$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

• Si  $x < 0$ , puisque pour tout entier naturel  $n, f_n(x) = -f_n(-x)$ , la série numérique de terme général  $f_n(x)$  converge.

Finalement

la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Convergence normale.** La fonction  $f_0$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$  et donc la série de fonctions de terme général  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , n'est pas normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .

Analysons la convergence normale de la série de fonctions de terme général  $f_n, n \geq 1$ , sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $g_n = (-1)^n f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$g'_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} + x \times \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La fonction  $g_n$  est positive sur  $\mathbb{R}^+$ , croissante sur  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$ . Puisque la fonction  $g_n$  est impaire, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = g_n \left( \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}.$$

Mais  $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(- (n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$  et donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^{\frac{1}{2} + o(1)}} > 0.$$

Par suite, la série numérique de terme général  $\|f_n\|_\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , diverge et donc

la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}$ .

**Convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , puisque la suite  $\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive décroissante et de limite nulle, d'après une majoration classique du reste à l'ordre  $n$  d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x}{(1+x^2)^k} \right| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} \right| = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} = g_{n+1}(x) \leq g_{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right),$$

cette inégalité restant valable pour  $x < 0$  par parité. Donc  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |R_n(x)| \leq g_{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$ . D'après ci-dessus,

$g_{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et il en est de même de  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |R_n(x)|$ . On a montré que

la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+ka} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{ka} dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-t^a)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a} dt,$$

avec  $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a} dt \right| \leq \int_0^1 t^{(n+1)a} dt = \frac{1}{1+(n+1)a}$ . Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a} dt = 0$ . On en déduit que la série de terme général  $\frac{(-1)^k}{1+ka}$ ,  $k \geq 0$ , converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt.$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

- Convergence simple.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \geq 1 > 0$  et donc  $f_n(t)$  existe. Ensuite,  $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) > 0$  et donc la suite numérique  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est alternée en signe. De plus,  $|f_n(t)| = \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$  et la suite  $(|f_n(t)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série de terme général  $f_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

La série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

On pose alors  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

**Convergence uniforme.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après une majoration classique du reste à l'ordre  $n$  d'une série alternée, pour tout réel  $t$  on a

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq |f_{n+1}(t)| = \ln\left(1 + \frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{t^2 + 1 - 1}{(n+1)(1+t^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(1+t^2)}\right) \\ &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

et donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(t)| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0$ , on a encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(t)| = 0$  et on a montré que

La série de fonctions de terme général  $f_n, n \geq 1$ , converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Continuité.** Puisque chaque fonction  $f_n, n \geq 1$ , est continue sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. D'après le théorème d'interversion des limites,  $f$  a une limite réelle en  $+\infty$  et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) \text{ (voir l'exercice ??, 5)).}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

**Domaine de définition.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(t)$  existe et de plus  $f_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Donc la série numérique de terme général  $f_n(t), n \geq 1$ , converge absolument et en particulier converge. On a montré que

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Parité.** Pour tout réel  $t$ ,

$$f(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(-nt)}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2} = -f(t).$$

$f$  est impaire.

**Convergence normale.** Pour tout réel  $t$  et tout entier naturel non nul  $n$ ,  $|f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$  et donc pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Comme la série numérique de terme général  $\frac{\pi}{2n^2}, n \geq 1$ , converge, la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement et donc uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Limite de  $f$  en  $+\infty$ .** Puisque la série de fonctions de terme général  $f_n, n \geq 1$ , converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et que chaque fonction  $f_n$  a une limite réelle quand  $t$  tend vers  $+\infty$  à savoir  $\ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$ , le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que  $f$  a une limite réelle en  $+\infty$  et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12}$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\frac{\pi^3}{12}$ .

**Continuité.** Puisque chaque fonction  $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ , est continue sur  $\mathbb{R}$  et que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Dérivation.** Soit  $a > 0$ . Chaque fonction  $f_n, n \geq 1$ , est de classe  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \geq a$ ,

$$f'_n(t) = \frac{n}{n^2(1+n^2t^2)} = \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a alors  $\sup_{t \in [a, +\infty[} |f'_n(t)| = f'_n(a) = \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$ . Puisque  $\frac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2 n^3} > 0$ , la série de terme général  $\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$  converge et par suite, la série de fonctions de terme général  $f'_n, n \geq 1$ , converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

En résumé,

- la série de fonctions de terme général  $f_n, n \geq 1$ , converge simplement vers  $f$  sur  $[a, +\infty[$ ,
- chaque fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$ ,
- la série de fonctions de terme général  $f'_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$  et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout  $a > 0$ ,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et puisque  $f$  est impaire

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^*, f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

**Dérivabilité en 0.** La fonction  $f'$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Donc la fonction  $f'$  admet une limite en  $0^+$  élément de  $] -\infty, +\infty]$ . Pour  $t > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f'(t) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+n^2t^2)}$  et quand  $t$  tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

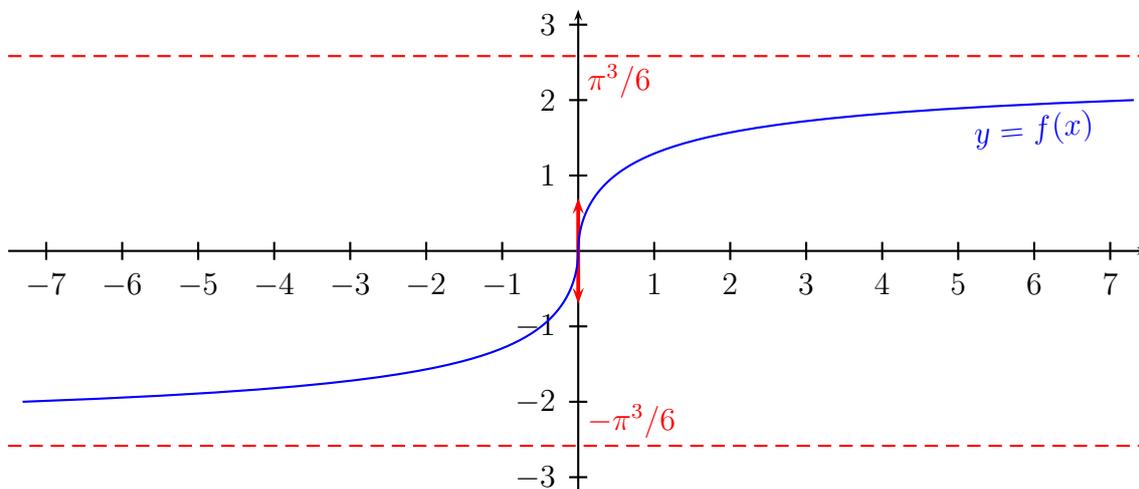
Cette inégalité étant vraie pour tout entier naturel non nul  $N$ , quand  $N$  tend vers  $+\infty$  on obtient

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

On a montré que  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t) = +\infty$ .

En résumé,  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $[0, +\infty[$ , de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et  $f'(t)$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures. D'après un corollaire du théorème des accroissements finis, on sait que  $f$  n'est pas dérivable en 0 à droite et que sa courbe représentative admet  $[Oy)$  pour demi-tangente en  $(0, 0)$ . Puisque  $f$  est impaire,  $f$  n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet  $(Oy)$  pour tangente en  $(0, 0)$ .

**Allure du graphe.**



Soit  $x > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n} + 2\ln n} = o(1)$  d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que  $e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et donc que la série de terme général  $e^{-x\sqrt{n}}$  converge. Ainsi,  $f$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . La fonction  $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Donc,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{k}}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $e^{-x\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k e^{-x\sqrt{t}} dt$ . En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \quad (*).$$

Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . En posant  $u = x\sqrt{t}$  et donc  $t = \frac{u^2}{x^2}$  puis  $dt = \frac{2u}{x^2} du$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \frac{2}{x^2} \times \Gamma(2) = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement (\*) s'écrit alors

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}.$$

Comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x^2} = +\infty$ , on a montré que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x \rightarrow 0, x > 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|x^{n^2}| = |x|^{n^2} \leq |x|^n$ . Puisque la série numérique de terme général  $|x|^n$  converge, on en déduit que la série de terme général  $x^{n^2}$  est absolument convergente et en particulier convergente. Donc,  $f$  est bien définie sur  $] -1, 1[$ .

Soit  $x \in ]0, 1[$ . La fonction  $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Donc,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_k^{k+1} x^{t^2} dt \leq x^{k^2} \leq \int_{k-1}^k x^{t^2} dt$ . En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in ]0, 1[, \int_1^{+\infty} x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \quad (*).$$

Soit  $x \in ]0, 1[$ . En posant  $u = t\sqrt{-\ln x}$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t\sqrt{-\ln x})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

L'encadrement (\*) s'écrit alors

$$\forall x \in ]0, 1[, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} - \int_0^1 x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = +\infty$ , on a montré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \rightarrow 1, x < 1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$