



# Fonctions circulaires et hyperboliques inverse

---

## 1 Fonctions circulaires inverses

### Exercice 1

---

Une statue de hauteur  $s$  est placée sur un piédestal de hauteur  $p$ . À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000745]

### Exercice 2

---

Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3 \operatorname{Arctan} x).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000747]

### Exercice 3

---

Résoudre les équations suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000749]

### Exercice 4

---

Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000752]

### Exercice 5

---

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000746]

## 2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

### Exercice 6

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[000759]

### Exercice 7

Les réels  $x$  et  $y$  étant liés par

$$x = \ln \left( \tan \left( \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

calculer  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$  et  $\operatorname{th} x$  en fonction de  $y$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[000764]

### Exercice 8

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions ; y a-t-il des solutions continues sur  $\mathbb{R}^+$  ?

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[000758]

### Exercice 9

Résoudre l'équation  $x^y = y^x$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers positifs non nuls.

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[000776]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Faire un dessin. Remarquer que maximiser l'angle d'observation  $\alpha$  revient à maximiser  $\tan \alpha$ . Puis calculer  $\tan \alpha$  en fonction de la distance et étudier cette fonction.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques. Pour la dernière expression commencer par calculer  $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ ,  $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

On compose les équations par la bonne fonction, par exemple sinus pour la première.

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Faire une étude de fonction.

$\operatorname{sgn}(x)$  est la *fonction signe* : elle vaut  $+1$  si  $x > 0$ ,  $-1$  si  $x < 0$  (et  $0$  si  $x = 0$ ).

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

On pourra étudier les fonctions définies par la différence des deux termes de chaque inégalité.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Réponses :

1.  $\frac{3}{4}$  ;
  2.  $\ln 2$ .
- 

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Il faut trouver  $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos(y)}$ ,  $\operatorname{sh} x = \tan y$ ,  $\operatorname{th} x = \sin y$ .

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. Regarder ce qui se passe en deux valeurs opposées  $x$  et  $-x$ .
  2. Poser  $X = e^x$ .
- 

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Montrer que l'équation  $x^y = y^x$  est équivalente à  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ , puis étudier la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ .

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

On note  $x$  la distance de l'observateur au pied de la statue. On note  $\alpha$  l'angle d'observation de la statue seule, et  $\beta$  l'angle d'observation du piedestal seul. Nous avons les deux identités :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{p+s}{x}, \quad \tan \beta = \frac{p}{x}.$$

En utilisant la relation  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$  on obtient

$$\tan \alpha = \frac{sx}{x^2 + p(p+s)}.$$

Maintenant l'angle  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et la fonction  $\tan$  est croissante sur cet intervalle, donc maximiser  $\alpha$  est équivalent à maximiser  $\tan \alpha$ . Étudions la fonction  $f(x) = \frac{sx}{x^2 + p(p+s)}$  définie sur  $x \in [0, +\infty[$ . Après calculs  $f'$  ne s'annule qu'en  $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$  qui donne le maximum de  $f$  (en 0 et  $+\infty$  l'angle est nul). Donc la distance optimale de vision est  $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ .

En complément on peut calculer l'angle maximum  $\alpha_0$  correspondant : par la relation  $\tan \alpha_0 = f(x_0) = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$ , on obtient  $\alpha_0 = \text{Arctan} \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$ .

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

1.  $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$  donc  $\sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y}$ . Donc  $\sin \text{Arccos } x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \text{Arccos } x} = \pm \sqrt{1 - x^2}$  et comme  $\text{Arccos } x \in [0, \pi]$  on a  $\sin \text{Arccos } x = +\sqrt{1 - x^2}$ .

2. De la même manière on trouve la même formule pour :  $\cos \text{Arcsin } x = +\sqrt{1 - x^2}$ .

3. Commençons par calculer  $\sin(\text{Arctan } x)$ ,  $\cos(\text{Arctan } x)$ . On utilise  $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 - \sin^2 y}$  avec  $y = \text{Arctan } x$ . Cela donne  $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$  et  $\sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$ . En étudiant les signes de  $\sin(y)$ ,  $\cos(y)$  nous obtenons  $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Il ne reste plus qu'à linéariser  $\sin(3y)$  :  $\sin(3y) = 3 \sin y \cos^2 y - \sin^3 y$ , ce qui s'écrit aussi  $\sin(3y) = 4 \sin y \cos^2 y - \sin y$ . Ces formules s'obtiennent à la main en écrivant d'abord  $\sin(3y) = \sin(2y + y) = \sin(2y) \cos(y) + \dots$ . Ou alors à l'aide des nombres complexes et de la formule de Moivre en développant  $\cos(3y) + i \sin(3y) = (\cos y + i \sin y)^3 = \cos^3 y + 3i \cos^2 y \sin y + \dots$  puis identifiant les parties imaginaires.

Maintenant

$$\sin(3 \text{Arctan } x) = \sin(3y) = 4 \sin y \cos^2 y - \sin y = 4 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. En prenant le sinus de l'équation  $\text{Arcsin } x = \text{Arcsin } \frac{2}{5} + \text{Arcsin } \frac{3}{5}$  on obtient  $x = \sin(\text{Arcsin } \frac{2}{5} + \text{Arcsin } \frac{3}{5})$ , donc  $x = \frac{2}{5} \cos \text{Arcsin } \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cos \text{Arcsin } \frac{2}{5}$ . En utilisant la formule  $\cos \text{Arcsin } x = +\sqrt{1 - x^2}$ . On obtient  $x = \frac{2}{5} \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$ .

2. En prenant le cosinus de l'équation  $\text{Arccos } x = 2 \text{Arccos } \frac{3}{4}$  on obtient  $x = \cos(2 \text{Arccos } \frac{3}{4})$  on utilise la formule  $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$  et on arrive à :  $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$ .

3. En prenant la tangente et à l'aide de  $\tan(a+b) = \dots$  on obtient :  $x = \tan(2 \text{Arctan } \frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$ .

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $f$  la fonction sur  $[-1, 1]$  définie par  $f(x) = \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$  alors  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$  pour chaque  $x \in ]-1, 1[$ ; donc  $f$  est une fonction constante sur l'intervalle  $[-1, 1]$  (car continue aux extrémités). Or  $f(0) = \frac{\pi}{2}$  donc pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $f(x) = \frac{\pi}{2}$ .

2. Soit  $g(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$ , la fonction est définie sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . On a  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$  donc  $g$  est constante sur chacun de ses intervalles de définition.  $g(x) = c_1$  sur  $] -\infty, 0[$  et  $g(x) = c_2$  sur  $]0, +\infty[$ . En calculant  $g(1)$  et  $g(-1)$  on obtient  $c_1 = -\frac{\pi}{2}$  et  $c_2 = +\frac{\pi}{2}$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit  $f(a) = \text{Arcsin } a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$  sur  $]0, 1[$ . Alors  $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{-a^2}{1-a^2}$  donc  $f'(a) \leq 0$ . Ainsi  $f$  est strictement décroissante et  $f(0) = 0$  donc  $f(a) < 0$  pour tout  $a \in ]0, 1[$ .
2. Si  $g(a) = \text{Arctan } a - \frac{a}{1+a^2}$  alors  $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$ . Donc  $g$  est strictement croissante et  $g(0) = 0$  donc  $g$  est strictement positive sur  $]0, +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Par la formule du binôme de Newton nous avons  $\text{ch}^3 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x})$ . Et de même  $\text{sh}^3 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})$ . Donc  $e^{-x}(\text{ch}^3 x - \text{sh}^3 x) = \frac{1}{8}e^{-x}(6e^x + 2e^{-3x}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x}$  qui tend vers  $\frac{3}{4}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2.  $x - \ln(\text{ch } x) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = x - \ln(e^x + e^{-x}) + \ln 2 = x - \ln(e^x(1 + e^{-2x})) + \ln 2 = x - x + \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2 = \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2$ . Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\ln(1 + e^{-2x}) \rightarrow 0$  donc  $x - \ln(\text{ch } x) \rightarrow \ln 2$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

Soit  $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ .

1.

$$\text{ch } x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos(y)}.$$

2. De même  $\text{sh } x = \tan y$ .

3.  $\text{th } x = \sin y$ .

Ce sont des formules classiques utiles à connaître.

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si  $f$  existe alors pour  $x = 1$  on a  $f(\text{ch } 1) = e$  et pour  $x = -1$  on a  $f(\text{ch } -1) = f(\text{ch } 1) = 1/e$ . Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici  $t = \text{ch } 1$ ).
2. Notons  $X = e^x$ , l'équation devient

$$f(X) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

Comme la fonction exponentielle est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, +\infty[$ , alors l'unique façon de définir  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est par la formule  $f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ .

3. Comme  $e^x$  est toujours non nul, alors  $f$  peut prendre n'importe quelle valeur en 0.  $f(0) = c \in \mathbb{R}$  et  $f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$  pour  $t > 0$ . Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de  $f(t)$  quand  $t > 0$  et  $t \rightarrow 0$  est  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y \ln x} = e^{x \ln y} \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  sur  $[1, +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

donc  $f$  est croissante sur  $[1, e]$  et décroissante sur  $[e, +\infty[$ . Donc pour  $z \in ]0, f(e)[ = ]0, 1/e[$ , l'équation  $f(x) = z$  a exactement deux solutions, une dans  $]1, e[$  et une dans  $]e, +\infty[$ .

Revenons à l'équation  $x^y = y^x$  équivalente à  $f(x) = f(y)$ . Prenons  $y$  un entier, nous allons distinguer trois cas :  $y = 1$ ,  $y = 2$  et  $y \geq 3$ . Si  $y = 1$  alors  $f(y) = z = 0$  on doit donc résoudre  $f(x) = 0$  et alors  $x = 1$ . Si  $y = 2$  alors il faut résoudre l'équation  $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in ]0, 1/e[$ . Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur  $]0, e[$  qui est  $x = 2$  (!) et une sur  $]e, +\infty[$  qui est 4, en effet  $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$ . Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à  $2^2 = 2^2$  et  $2^4 = 4^2$ .

Si  $y \geq 3$  alors  $y > e$  donc il y a une solution  $x$  de l'équation  $f(x) = f(y)$  dans  $]e, +\infty[$  qui est  $x = y$ , et une solution  $x$  dans l'intervalle  $]1, e[$ . Mais comme  $x$  est un entier alors  $x = 2$  (c'est le seul entier appartenant à  $]1, e[$ ) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à  $4^2 = 2^4$ .

Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation  $x^y = y^x$  sont les couples  $(x, y = x)$  et les couples  $(2, 4)$  et  $(4, 2)$ .

---