



## Equations différentielles

---

### Exercice 1

---

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans  $]0, \infty[$  l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer  $a \in ]0, \infty[$  tel que  $y(x) = ax$  soit une solution particulière  $y_0$  de  $(E)$ .
2. Montrer que le changement de fonction inconnue :  $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$  transforme l'équation  $(E)$  en l'équation différentielle

$$(E1) \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1.$$

3. Intégrer  $(E1)$  sur  $]0, \infty[$ .
4. Donner toutes les solutions de  $(E)$  définies sur  $]0, \infty[$ .

[Correction ▼](#)

[000847]

### Exercice 2

---

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

[Correction ▼](#)

[000863]

### Exercice 3

---

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

[Correction ▼](#)

[000864]

### Exercice 4

---

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

[Correction ▼](#)

[000865]

### Exercice 5

---

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .
2. Trouver une solution particulière de  $(E)$  (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de  $(E)$ .
3. Déterminer l'unique solution  $h$  de  $(E)$  vérifiant  $h(0) = 1$  et  $h(1) = 0$ .
4. Soit  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $]0, \infty[$  et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

- (a) On pose  $g(x) = f(e^x)$ , vérifier que  $g$  est solution de  $(E)$ .

(b) En déduire une expression de  $f$ .

[Correction ▼](#)

[000866]

---

### Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où  $d$  est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à  $(E.D.)$ .
2. Trouver une solution particulière de  $(E.D.)$  lorsque  $d(x) = e^{-2x}$  et lorsque  $d(x) = e^{2x}$  respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de  $(E.D.)$  lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

[Correction ▼](#)

[000872]

---

### Exercice 7

Résoudre :  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$ .

[Correction ▼](#)

[000880]

---

### Exercice 8

Déterminer les  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

[Correction ▼](#)

[000881]

---

### Exercice 9

En posant  $t = \arctan x$ , résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

[Correction ▼](#)

[000884]

---

### Exercice 10

Résoudre par le changement de fonction  $z = \frac{y}{x}$  l'équation différentielle :

$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

[Correction ▼](#)

[000885]

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

1. On cherche une solution particulière de (E), de la forme  $y(x) = ax$  pour  $x \in ]0, \infty[$ . Alors en injectant  $y(x)$  dans (E) on a

$$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$

donc  $a^2 = 9$ . On prend donc  $y_0(x) = 3x$  comme solution particulière de (E) définie sur  $]0, \infty[$ .

2. On fait le changement de fonction inconnue suivant :  $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$  où  $z$  est une fonction définie sur  $]0, \infty[$  à trouver. Ici  $y_0(x) = 3x$  donc  $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$ . On calcule les dérivées et le carré de  $y(x)$  pour l'injecter dans (E) : On a

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$

donc en injectant dans (E) on a

$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$

d'où en simplifiant et en arrangeant on a :

$$(E1) \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1.$$

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

$y'' - 3y' + 2y = e^x$ . Le polynôme caractéristique est  $f(r) = (r-1)(r-2)$  et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme  $y_p(x) = P(x)e^x$ , on est dans la situation (ii) la condition (\*) sur  $P$  est :  $P'' - P' = 1$ , et  $P(x) = -x$  convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

---

$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$ . Ici  $f(r) = (r-1)(r+1)$  et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction  $3\cos x$  vérifie l'équation :  $y'' - y = -6\cos x$ , il nous reste donc à chercher une solution  $y_1$  de l'équation  $y'' - y = 2x\sin x$ , car  $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$  sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que  $2x\sin x = \text{Im}(2xe^{ix})$  et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution  $z_1$  de l'équation :  $y'' - y = 2xe^{ix}$ . On cherche  $z_1$  sous la forme  $P(x)e^{ix}$  où  $P$  est un polynôme de degré 1 car  $f(i) = -2 \neq 0$ . On a  $f'(i) = 2i$ , la condition (\*) sur  $P$  est donc :  $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$  ce qui donne après identification  $P(x) = -x - i$ . Alors  $y_1(x) = \text{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$ . Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de  $y'' - y = 2x\sin x$  : On la cherche de la forme  $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$  où  $A, B$  sont des polynômes de degré 1 car  $i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type  $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$  la discussion porte sur  $\alpha + i\beta$  et non sur  $\alpha$  ou  $\beta$ ...). On calcule  $y_1', y_1''$  et on applique l'équation étudiée à  $y_1$  ... on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A')\cos x = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si : 
$$\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}$$

On écrit :  $A(x) = ax + b$  et  $B(x) = cx + d$ , après identification on obtient :  $a = d = -1$ ,  $b = c = 0$ , ce qui détermine  $y_1$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}$ . L'équation caractéristique a 2 racines complexes  $r_1 = -1/2 + i$  et  $r_2 = \bar{r}_1$  et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a  $\sin x e^{-x/2} = \text{Im}(e^{(-1/2+i)x})$ , on commence donc par chercher une solution  $z_p$  de l'équation avec le nouveau second membre  $e^{(-1/2+i)x}$ . Comme  $-1/2 + i$  est racine de l'équation caractéristique, on cherchera  $z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$  avec  $P$  de degré 1. Par conséquent la condition (\*) sur  $P$  :

$$4P'' + f'(-1/2 + i)P' + f(-1/2 + i)P = 1$$

s'écrit ici :  $8iP' = 1$  ( $P'' = 0$ ,  $f(-1/2 + i) = 0$  et  $f'(-1/2 + i) = 8i$ ), on peut donc prendre  $P(x) = -i/8x$  et  $z_p(x) = -i/8x e^{(-1/2+i)x}$ , par conséquent sa partie imaginaire  $y_p(x) = \text{Im}(-i/8x e^{(-1/2+i)x}) = 1/8x \sin x e^{-x/2}$  est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + (c_2 + 1/8x) \sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Le polynôme caractéristique associé à  $E$  est :  $p(x) = x^2 + 2x + 4$  ; son discriminant est  $\Delta = -12$  et il a pour racines les 2 nombres complexes  $-1 + i\sqrt{3}$  et  $-1 - i\sqrt{3}$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque  $a, b$  décrivent  $\mathbb{R}$ .

2. Le second membre est de la forme  $e^{\lambda x}Q(x)$  avec  $\lambda = 1$  et  $Q(x) = x$ . On cherchera une solution de l'équation sous la forme :  $y_p(x) = R(x)e^x$  avec  $R$  polynôme de degré égal à celui de  $Q$  puisque  $p(1) \neq 0$ . On pose donc  $R(x) = ax + b$ . On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc  $y_p$  est solution si et seulement si  $7ax + 7a + 4b = x$ . On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction  $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$  est donc solution de  $E$  et la forme générale des solutions de  $E$  est :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x ; a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit  $h$  une solution de  $E$ . Les conditions  $h(0) = 1$ ,  $h(1) = 0$  sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

4. (a) On a :  $g'(x) = e^x f'(e^x)$  et  $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$  d'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = x e^x$$

donc  $g$  est solution de  $E$ .

(b) Réciproquement pour  $f(t) = g(\log t)$  où  $g$  est une solution de  $E$  on montre que  $f$  est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions  $f$  recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a \cos(\sqrt{3} \log t) + b \sin(\sqrt{3} \log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}); a, b \in \mathbb{R}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. L'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 4 = 0$  a une racine (double)  $r = 2$  donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pour  $d(x) = e^{-2x}$  on peut chercher une solution particulière de la forme :  $y_1(x) = a e^{-2x}$  car  $-2$  n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a  $y_1'(x) = -2e^{-2x}$  et  $y_1''(x) = 4ae^{-2x}$ . Par conséquent  $y_1$  est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x}$$

donc si et seulement si  $a = \frac{1}{16}$ .

Pour  $d(x) = e^{2x}$  on cherche une solution de la forme  $y_2(x) = ax^2 e^{2x}$ , car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a  $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$  et  $y_2''(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$ . Alors  $y_2$  est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$

donc si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$ .

3. On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2 e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{2x} + \frac{1}{64} e^{-2x} + \frac{1}{8} x^2 e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

Réponse :  $(\lambda x + \mu) e^{-x} + \frac{e^x}{25} [(3x - 4) \cos x - (4x - 2) \sin x] + (\sin x - x \cos x) e^{-x}$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

Réponse :  $\frac{1}{2}(-x \cos x + \sin x) + \lambda \cos x + \mu \sinh x$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Réponse :  $x \rightarrow \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

Réponse :  $x \rightarrow \lambda x \sinh x + \mu x \cosh x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .