Exo7

Année 2009

Exercices de mathématiques

Nombres complexes

1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1. Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2. Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 3. Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 4. Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84)+i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)-i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 5. Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 6. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 7. Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 8. Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.

2 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 9. Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 10. Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

Exercice 11.
1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 12. Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$.
2. $z^3+3z-2i=0$.

3 Racine n-ième

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice 16. Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 17. Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24}=1$.

Exercice 18. Calculer la somme $S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n$.

Exercice 19.
1. Résoudre $z^3=1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2=0$.
2. Résoudre $z^n=1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\varepsilon,\dots,\varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$. Calculer, pour $p\in\mathbb{N}$, $1+\varepsilon^p+\varepsilon^{2p}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 20. 1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.

Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9+i)^2$)

4 Géométrie

Exercice 21. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 22. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

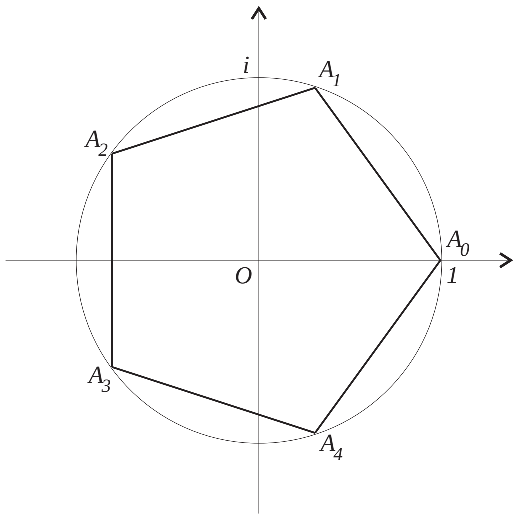
Exercice 23. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Exercice 24. 1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?

2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Exercice 25. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 26. Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonorm'e $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin \frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

5 Trigonométrie

Exercice 27. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 28. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

6 Divers

Exercice 29. Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - z| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :

$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$

(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Exercice 30.

1. Montrer que si $x + y + z = a$, $yz + zx + xy = b$, $xyz = c$, alors x, y et z sont solutions de l'équation $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$. Trouver x, y et z si on suppose $a = b = 0$ et $c = -8$.
2. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Indications 18. Calculer $(1-z)S_n$.

Indications 21. Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Indications 27. Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Correction 1. Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{3} = \frac{1+3i}{3},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{3}\right)^2 = \frac{-8+6i}{9} = -\frac{8}{9}+\frac{6}{9}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{9}+\frac{6}{9}-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{67}{45}+\frac{84}{45}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\overline{z} = -3$.

Correction 2. 1. $1+i\sqrt{3}$.

2. $3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Correction 3. $9-7i$; $-6i$; $-0{,}3+1{,}1i$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$.

Correction 4. Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction 5. Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction 6. D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu} + e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}} 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\theta e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\theta/2 \geq 0$ ($i.e.$ $\theta \in [-\pi + 4k\pi, +\pi + 4k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$) alors $2\cos\theta$ est le module de z et $3\theta/2$ est son argument ; par contre si $\cos\theta/2 < 0$ le module est $2|\cos\theta|$ et l'argument $3\theta/2 + \pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi} = -1$).

Correction 7. Écrivons $z=\rho e^{i\theta}$, alors $\overline{z}=\rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n}\left(z^k+\overline{z}^k\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left((e^{i\theta})^k+(e^{-i\theta})^k\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta})\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}2\rho^k\cos k\theta\\
&= 2^n.\rho.\rho^2.\ldots.\rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta\\
&= 2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta.
\end{aligned}$$

Correction 8.

$$1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}})=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Comme $\theta\in]-\pi,+\pi[$ alors le module est $2\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$ et l'argument est $\frac{\theta}{2}$. Géométriquement, on trace le cercle de centre 1 et de rayon 1. L'angle en 0 du triangle $(0,1,1+e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$ et donc est le double de l'angle en 0 du triangle $(1,2,1+e^{i\theta})$ qui vaut θ.
C'est le résulat géométrique (théorème de l'angle au centre) qui affirme que pour un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

Correction 9. Racines carrées. Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec $a,b\in\mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega\in\mathbb{C}$ tels que $\omega^2=z$. Écrivons $\omega=\alpha+i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
\omega^2=z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2=a+ib\\
&\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta=a+ib
\end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=a\\ 2\alpha\beta=b\end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \alpha^2 - a = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta^2 = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α, β) de solution et donc deux racines carrées $\omega = \alpha + i\beta$ de z.
En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z =$

$8-6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 10-\alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ ou \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z = 8-6i$ sont donc $\omega = 3-i$ et $-\omega = -3+i$.

Correction 10. $2-i$ et $-2+i$; $\qquad 5-i$ et $-5+i$.

Correction 11. Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Correction 12. Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \geq 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées... Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\bar{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\bar{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\bar{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction 13. Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3 + 4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2 + i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Correction 14.
1. $\Delta = -2i$ dont les racines carrées sont $1 - i$ et $-1 + i$, d'où les racines $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 6 - 3i$.
2. Une racine "évidente" $z_1 = i$, d'où la résolution complète en effectuant la division par $z - i$. On trouve $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Correction 15. $\frac{1}{4}(-1 + i) = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}e^{\frac{3i\pi}{4}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}})^3$. Les solutions sont les complexes $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{3}}$ pour $0 \leq k \leq 2$. Et seul $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$ a une puissance quatrième réelle.

Correction 16. 1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603 - 0{,}36603i$, $-0{,}36603 + 1{,}36603i$ et $-1-i$.

2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction 17. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.
Les racines de $z^{24} = 1$ sont données par $z_k = e^{2ki\pi/24}$ pour $k = 0, 1, \dots, 23$. Ce sont donc 1, $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

Correction 18.

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$d'une suite géométrique dans le cas où $z \neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1-z) &= (1+z+z^2+\dots+z^n)(1-z) \text{ développons} \\ &= 1+z+z^2+\dots+z^n - z - z^2 - \dots - z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Correction 19. Calcul de racine n-ième. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ \varepsilon^k,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathcal{S} \setminus \{1\}$.
Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.
Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $Q_p(z) = p$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Correction 20. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :

$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$

Etudions l'équation $Z^2+(7-i)Z-8-8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2+4(8+8i) = 80+18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction 21. Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x+iy$ à $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie présiment que que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3, 0)$ et $5 = (5, 0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A, B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 7 \\
&\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8 \\
&\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction 22. En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B \cot \frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Correction 23. Méthode analogue à celle de l'exercice 22. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z - z_0|$).

Correction 24.

1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).
2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Correction 25.

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0, u, v, u + v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u + v|, |u - v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes ! !

Correction 26. 1. Comme $(A_0, \ldots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.

2. $\mathrm{Re}(1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2 = |\omega_2+1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\sin(\frac{4\pi}{5}) + 1|^2 = 1 + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos^2(\frac{4\pi}{5}) + \sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2 + 1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathcal{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathcal{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction 27. Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction 28. 1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$ ssi $x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/10 + 2k\pi/5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$ ssi $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Correction 29. 1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$ et $a + c \in \mathbb{Z}$, $b + d \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc)$ et $ac - bd \in \mathbb{Z}$, $ad + bc \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta = 1$. Ainsi, $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq \sup(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|)$ et si $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, $\sup(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \geq 1$. Si $|\alpha| \neq 1$ alors $|\alpha| > 1$ et $|1/\alpha| < 1$. On en déduit $1/\alpha = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha| = 1$, ce qui implique $\alpha \in \{1, -1, i, -i\}$.

   Réciproquement, $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[i], (-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[i], i^{-1} = -i \in \mathbb{Z}[i], (-i)^{-1} = i \in \mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1, -1, i$ et $-i$.

3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Notons $\omega = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x) \leq x < E(x)+1$. Si $x \leq E(x) + 1/2$, notons $n_x = E(x)$, et si $x > E(x) + 1/2$, notons $n_x = E(x) + 1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x - n_x| \leq 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $z = n_x + in_y$. $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $|\omega - z|^2 = (x - n_x)^2 + (y - n_y)^2 \leq 1/4 + 1/4 = 1/2$. Donc $|\omega - z| < 1$.

4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, avec $\beta \neq 0$. Soit alors $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$. Soit $r = \alpha - \beta q$. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$ donc $|r| < |\beta|$.

Correction 30. 1. À permutation près, $x = -2$, $y = -2j$ et $z = -2j^2$ (j désigne la racine cubique de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).

2. À permutation près, $x = 1$, $y = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.