Année 2009

Exercices de mathématiques

Logique, ensembles, raisonnements

1 Logique

Exercice 1. Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 3. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $\ x^2=4$ ...... $x=2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $\ z=\overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $\ x=\pi$ ...... $e^{2ix}=1$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\leq 0\}$ et $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\geq 1,\ x\geq 0\}$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1\ \exists M_2 \in F_2 \quad / \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1\ \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$

3. $\exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad / \quad \forall M_1 \in F_1 \, \forall M_2 \in F_2 \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1 \, \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad / \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

Exercice 5. Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

Exercice 6. Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ / \ \ |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon$.

Exercice 7. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que ($n \geq N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$).

Exercice 8. Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

2 Ensembles

Exercice 9. Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 10. Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 12. Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right].$$

Exercice 13. Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

3 Absurde et contraposée

Exercice 14. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 15.

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$, r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

4 Récurrence

Exercice 16. Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 18.

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un “vrai” triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Exercice 19. Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Indications 1. Attention : la négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et réciproquement).

Indications 4. Faire un dessin de F_1 et de F_2. Essayer de voir si la difficulté pour réaliser les assertions vient de ε "petit" (c'est-à-dire proche de 0) ou de ε "grand" (quand il tend vers $+\infty$).

Indications 7. En fait on a toujours : $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$. Puis chercher une condition sur n pour que l'inégalité
$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$
soit vraie.

Indications 10. Il est plus facile de raisonner en prenant un élément $x \in E$. Par exemple, soit F, G des sous-ensemble de E, pour montrer que $F \subset G$ il est équivalent de montrer que pour tout $x \in F$ alors $x \in G$. Et montrer $F = G$ est équivalent à $x \in F$ si et seulement si $x \in G$, et ce pour tout x de E. Remarque : pour montrer $F = G$ on peut aussi montrer $F \subset G$ puis $G \subset F$.
Enfin, se rappeler que $x \in \complement F$ si et seulement si $x \notin F$.

Indications 14. Par l'absurde, supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Puis pour un tel p, évaluer f et f_p en une valeur bien choisie.

Indications 15. Pour la première question vous pouvez raisonner par contraposition.

Indications 17.
1. Récurrence : calculer $x_{n+1} - 3$.
2. Calculer $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Récurrence.

Indications 19. Pour les deux questions, travailler par récurrence.

Correction 1. 1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x+y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x+y = x-x-1 = -1 \leq 0$.

2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x+1$ et alors $x+y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x+y \leq 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x+y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leq 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad y^2 \leq x$.

Correction 2. Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leq 1)$. La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "$(f(x) \leq 1)$" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$. Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$".
3. La négation est : l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive. On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leq 0)$". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est :"$(f(x) > 0)$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La négation de la première partie est "$(\forall x \in \mathbb{R})$, celle de la seconde est $(\exists y \in \mathbb{R})$, et celle de la troisième est ($x < y$ et $f(x) \leq f(y)$). Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \leq f(y)$".

Correction 3. 1. $\Leftarrow$

2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Correction 4. 1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon > 0$, définissons $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ et $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ la proposition est donc démontrée.

2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :

$$\forall M_1 \in F_1 \;\; \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$

et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.

3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1, 1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :

$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \;\; \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.

4. Cette proposition est vraie il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Correction 5. "Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction 6. 1. Un triangle dont aucun angle n'est droit n'est pas rectangle.

2. Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{Z} \;\; \exists y \in \mathbb{Z} \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Leftrightarrow z < x + 1),$$

la négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} \;\; \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geq x + 1).$$

4. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geq \varepsilon)$.

Correction 7. Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$ car $2n+1 \leq 2(n+2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité

$$2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

$$\begin{aligned} 2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2-\varepsilon)(n+2) < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geq N$ nous avons $n \geq N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon$.
En fait nous venons de prouver que la limite de la suite de terme $(2n+1)/(n+2)$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Correction 8.

1. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$;
2. $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ m \leq f(x) \leq M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -f(-x)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
6. $\exists a \in \mathbb{R}^*\ \forall x \in \mathbb{R} f(x+a) = f(x)$;
7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$;
8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
9. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
11. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = n$;
12. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)$;
13. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) > g(x)$.

Correction 9. Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon "directe". Nous supposons que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction 10.

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction 11. Montrons quelques assertions.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ car } f^{-1} = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Correction 12. $I_1 = [0, 2]$ et $I_2 =]1, +\infty[$.

Correction 13.
1. $B \setminus A \subset X \subset B$.
2. $B \subset X \subset B \cup \complement A$.

Correction 14. Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$ $f \neq f_p$.

Correction 15.
1. Montrons en fait la contraposée.
   S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = kp_i$ donc

   $$p_i(k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r) = 1$$

   soit $p_i q = 1$ (avec $q = k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$ un nombre entier) Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1. Et donc p_i n'est pas un nombre premier.

   Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i
2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ alors $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui même (c'est le 1.).

   Mais N est strictement supérieur à tous les p_i. Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i, il y a donc au moins $r+1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction 16. Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathcal{A}_n) \quad \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

– $\mathcal{A}_0$ est vraie $(1 = 1)$.
– Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathcal{A}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{A}_{n+1}$.
– Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 17. 1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Nous avons montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 + 3x_n + 12}{x_n + 2}$$

   Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

   - La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   - Soit $n \geq 0$, supposons que $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée. D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   - Nous concluons en résumant la situation :
     $\mathcal{H}_0$ est vraie, et $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathcal{H}_n$ est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Correction 18. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante :

$\mathcal{H}_n$: $\quad n$ droites en position générale découpent le plan en $R_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ régions.

- pour $n = 1$ alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ soit vraie, et montrons $\mathcal{H}_n$. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n droites en position générale, la droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en $n - 1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_{n-1}$: $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc

$$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

  Et $\mathcal{H}_n$ est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$.
- Conclusion : par récurrence on a montré que $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit $n \geqslant 1$.

Correction 19.

1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit $\mathcal{A}_n$ l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{A}_n$ vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

Nous avons utiliser la definition de f^{n+2}, puis la proposition $\mathcal{A}_n$, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \quad f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence : soit $\mathcal{A}_n$ l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{A}_n$ vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Donc $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$