



Exercices de mathématiques

Fractions rationnelles

- Exercice 1.**
1. Décomposer $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 2. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 3. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 4. Décomposer $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 5. Décomposer $\frac{X}{X^2-4}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 6. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 7. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 8. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 9. Décomposer $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .
 10. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur \mathbb{C} .
 11. Décomposer $\frac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur \mathbb{C} .
 12. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{C} .
 13. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 14. Décomposer $\frac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 15. Décomposer $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 16. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 17. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 18. Décomposer $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 19. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
 20. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

Exercice 2. Décomposition en éléments simples $\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$.

Exercice 3. Décomposition en éléments simples $\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$.

Exercice 4. Décomposition en éléments simples $\Phi = \frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)^3}$.

Indications 2. Attention il y a une partie entière, la fraction s'écrit

$$\Phi = x + 1 + \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

Indications 3. Il y a une partie entière qui vaut 2.

Correction 1. 1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}$.

2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}$.

3. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}$.

4. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}$.

5. $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}$.

6. $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}$.

7. $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$.

8. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}$.

9. $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 + \frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3} - \frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{X^2+X+2}$.

10. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$.

11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{-\frac{\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.

12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$.

13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$.

14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{-\frac{1}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$.

15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$.

16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.

17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j)^2} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}$.

$$20. \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}.$$

Correction 2. Commencer bien sûr par la division suivant les puissances décroissantes (la faire faire par les étudiants) : $\Phi = x + 1 + \Phi_1$ avec $\Phi_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

Puis factoriser le dénominateur et faire donner le type de décomposition de Φ_1 :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Expliquer qu'on obtient alors A en multipliant les deux membres de (1) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$). On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$). Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (1) par x et en passant à la limite pour $x \rightarrow \infty$ ($B = 4$). Faire remarquer que pour un cas aussi simple, les calculs peuvent se faire *de tête* en écrivant simplement les coefficients A, B, C au fur et à mesure qu'on les obtient.

$$\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2} = x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}}.$$

Correction 3. La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2 + \Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

Faire remarquer que la méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais qu'il resterait encore 3 coefficients à déterminer.

Il y a ici une méthode plus efficace : effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1 - 2x + x^2$:

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \quad (2)$$

En divisant les deux membres de (2) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$: méthode de l'exercice précédent, ou division suivant les puissances décroissantes de $x-2$ par $x-1$: $x-2 = (x-1) - 1$.

$$\frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x - a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x .

Correction 4. Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Fx + G}{x^2 + 1}. \quad (3)$$

La méthode du premier exercice permet d'obtenir A , puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (3) par x^2+1 , puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$, simplifier par $x^2 + 1$, calculer D et E ... (le faire faire quand même à titre d'entraînement).

On va ici se contenter de trouver A ($A = 3$), puis faire la soustraction $\Phi_1 = \Phi - \frac{A}{x}$. Faire faire le calcul aux étudiants ; leur faire remarquer que, sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 doit se simplifier par x . On trouve :

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ par $x^2 + 1$, puis du quotient obtenu par $x^2 + 1$.

$$\frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)^3} = \frac{3}{x} + \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^3} + \frac{3}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x - 2}{x^2 + 1}.$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle. Faire remarquer aussi comment on peut simplifier petit à petit en éliminant du dénominateur un dénominateur *simple* (méthode utilisée dans l'exercice 3 par le calcul de $\Phi - \frac{A}{x}$).