

Examen du 27 mai 2009
(durée 2 heures)

Epreuve SANS document et SANS calculatrice.

Les téléphones portables doivent être éteints.

Il y a cinq exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Les vecteurs et les matrices sont représentés en caractères gras.

Le barème entre parenthèse n'est qu'indicatif

I. Systèmes linéaires (~ 12 points)

Soit le système linéaire complexe suivant (avec $i^2 = -1$) :

$$\begin{cases} 2ix + 3iy + 2z = 2 \\ ix + iy + 3z = 4 \\ ix + 2iy - z = -2 \end{cases}$$

I.1 Ecrire ce système sous forme matricielle de la forme $\mathbf{MX}=\mathbf{B}$. Quelles sont les expressions de \mathbf{X} et \mathbf{B} ?

I.2 Le système est-il régulier, homogène ? Justifier.

I.3 Discuter l'existence ou non de solution(s). Le cas échéant, calculer la (ou les) solution(s) du système.

II. Développement limité (~ 10 points)

Soit une fonction f définie pour x réel :

$$f(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

II.1 Rappeler le développement limité (DL) d'une fonction $h(x)$ à l'ordre n au voisinage de $x_0=0$.

II.2 Donner le DL de la fonction $g(x) = e^x + 1$ au voisinage de $x_0=0$ à l'ordre 2.

II.3 Calculer le DL de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x_0=0$ aussi à l'ordre 2.

III. Etude de fonction (~ 18 points)

On se propose d'étudier la fonction :

$$f(x) = \frac{\ln(3x) - 1}{3x}$$

On résoudra les étapes suivantes :

III.1 Domaine de définition de f

III.2 Limites de f aux bornes de son intervalle de définition

III.3 Dérivée première $f'(x)$

III.4 Extrema de f

III.5 Dérivée seconde $f''(x)$

III.6 Points d'inflexion de f

III.7 Tableau de variations

III.8 Graphe de f

(AN : On donne comme valeurs numériques approchées, $e \approx 2.7$, $e^{5/2} \approx 12$, $e^{-1} \approx 0.37$ et $e^{-2} \approx 0.137$)

IV. Equation différentielle (~ 6 points)

On observe l'évolution de la densité N d'un système complexe de molécules données par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{d^2 N}{dt^2} - \frac{dN}{dt} - N = 0$$

IV.1 Résoudre cette équation différentielle.

IV.2 Trouver la valeur des constantes obtenues à la question précédente, sachant que $N(0) = N_0$ et $\frac{dN}{dt}(0) = N'(0) = 0$.

V. Différentielle (~ 10 points)

V.1 Les formes différentielles suivantes, sont-elles des différentielles totales ?

$$\delta\omega(x,y) = K(1 + y^2)dx + 2Kxydy \quad (\text{avec } K \text{ réel})$$

$$\delta\chi(x,y) = xy \cos x dx + xy \cos y dy$$

V.2 Le cas échéant, calculer l'expression de la fonction $f(x,y)$ dont la forme différentielle dérive.

VI. Intégrale (~ 4 points)

Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 xe^{2x} dx$ (AN : on prendra comme valeurs numériques approchées, $e \approx 3$)