Exo7

Année 2009

Exercices de mathématiques

Espaces vectoriels

1 Définition, sous-espaces

Exercice 1. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y-z = x+y+z = 0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 - z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ e^x e^y = 0\}$.
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z(x^2+y^2) = 0\}$.

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+a=0, \text{ et } x+3az=0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1)=0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0)=1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P'=3\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+\alpha y+1 \geqslant 0\right\}.$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \implies F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

2 Systèmes de vecteurs

Exercice 4. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1,2,3,4)$ et $\vec{e_2}(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 6. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ et $\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 7. Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha \text{ , 0 sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

3 Somme directe

Exercice 9. Soient $\vec{e_1}(0, 1, -2, 1), \vec{e_2}(1, 0, 2, -1), \vec{e_3}(3, 2, 2, -1), \vec{e_4}(0, 0, 1, 0)$ et $\vec{e_5}(0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = Vect\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$.
3. $dim(Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}) = 1$.
4. $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} + Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\} = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect\{\vec{e_4}, \vec{e_5}\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect$\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect$\{v_2, v_5\}$.

Exercice 11. Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 12. Soit

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Indications 1.

1. E_1 est un espace vectoriel, sa dimension est 1.
2. E_2 n'est pas un espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Indications 2.

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.
5. E_5 n'est pas un espace vectoriel.

Indications 3.

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion.

Indications 4. On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indications 5. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Un base comporte trois vecteurs.

Indications 6. Soit montrer la double inclusion. Soit montrer une seule inclusion et faire un petit raisonnement sur les dimensions. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad e_i \in F.$$

Indications 8. Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et des indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) telsque

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Évaluer cette expression est des valeurs bien choisies.

Indications 9.

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux.
5. Vrai.

Indications 10.

1. Non.
2. Non.

Indications 11. Soit

$$G = \left\{x \mapsto ax + b ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Indications 12. Pour une suite (u_n) qui converge vers ℓ regarder la suite $(u_n - \ell)$.

Correction 1. 1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :

(a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \in E_1$.

(b) Soient $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}$ deux éléments de E_1. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z') = (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x+x') & (y+y') & (z+z')\end{pmatrix}$ appartient à E_1.

(c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \in E_1$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x+\lambda y-\lambda z = \lambda x+\lambda y+\lambda z = 0$ donc que $\lambda\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x & \lambda y & \lambda z\end{pmatrix}$ appartient à E_1.

Posons $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z = 0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a les inclusions *strictes* : $\{0\} \subset E_1$ et $E_1 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^3$. Par la première on obtient $0 < \dim(E_1)$, par la seconde $\dim(F_1) < 3$ puis $\dim(E_1) < 2$ c'est à dire $\dim(E_1) = 1$.

2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 - z^2 = 0\}$ c'est à dire $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = z$ ou $x = -z\}$. Donc $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_2 mais $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_4 mais leur somme $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction 2. 1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y = 0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0\}$.

2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.

4. E_4 : non car le polynôme nul n'appartient pas à E_4.

5. E_5 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0) \in E_5$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin E_5$.

Correction 3. 1. Sens $\Leftarrow$. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.

Sens $\Rightarrow$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x+y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x+y \in F \cup G$ alors $x+y \in F$ ou $x+y \in G$.

- Si $x+y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x+y)+(-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.
- Si $x+y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x+y)+(-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde.

Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F.

2. Supposons $G \subset F$.
   - Inclusion $\supset$. Soit $x \in G+(F \cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tels que $x = a+b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x = a+b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x = a+b \in G+H$. Donc $x \in F \cap (G+H)$.
   - Inclusion $\subset$. Soit $x \in F \cap (G+H)$. $x \in G+H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x = a+b$. Maintenant $b = x-a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F \cap H$. Donc $x = a+b \in G+(F \cap H)$.

Correction 4. 1.

$$\begin{aligned}
&(x,1,y,1) \in Vect\{e_1,e_2\} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4)+\mu(1,-2,3,-4) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda)+(\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
&\Rightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad 1 = 2(\lambda-\mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda-\mu) \\
&\Rightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x,y). Donc on ne peut pas trouver de tels x,y.

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y) \in Vect\{e_1,e_2\} \\
\Leftrightarrow\ &\exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
\Leftrightarrow\ &\exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x,1,1,y)$ qui convient est $(1/3,1,1,2)$.

Correction 5. 1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (l'origine est dans E, la somme de deux vecteurs de E est dans E, la multiplication d'un vecteur de E par un réel reste dans E).

2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E. Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $V_1 = (1,-1,0,0)$. Il est bien clair que V_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur V_2 linéairement indépendant de V_1, prenons $V_2 = (1,0,-1,0)$. Alors V_1, V_2 n'engendrent pas tout E ; par exemple $V_3 = (1,0,0,-1)$ est dans E mais n'est pas engendré par V_1 et V_2. Montrons que (V_1,V_2,V_3) est une base de E.

   (a) (V_1,V_2,V_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$. Nous obtenons donc :

$$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ -\alpha & = 0 \\ -\beta & = 0 \\ -\gamma & = 0 \end{cases}.$$
$$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0.$$

Donc la famille est libre.

(b) Montrons que la famille est génératrice : soit $V = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Il faut écrire V comme combinaison linéaire de V_1, V_2, V_3. On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α, β, γ tels que $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = V$. On obtient que $V = -x_2 V_1 - x_3 V_2 - x_4 V_4$ (on utilise $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

Bien sûr vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Correction 6. Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$.Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc $\dim(E) \leq 2$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants donc $\dim(E) \geq 2$ c'est à dire $\dim(E) = 2$. Un raisonnement identique montre $\dim(F) = 2$. Enfin, les égalités $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ montrent que $F \subset E$ c'est à dire $E = F$.

Correction 7. $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.
Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 & = \lambda - \mu \\ x & = -\lambda + 2\mu \\ y & = \lambda + 3\mu \\ 3 & = 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda & = 1/3 \\ \mu & = 7/3 \\ x & = 13/3 \\ y & = 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Correction 8. À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons La famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Correction 9. Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$e_3 = 2e_1 + 3e_2.$$

Donc en fait nous avons $Vect(e_1, e_2, e_3) = Vect(e_1, e_2)$ et c'est un espace de dimension 2. Par la même relation on trouve que $Vect(e_1, e_2, e_3) = Vect(e_2, e_3)$

1. Vrai. $Vect\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$ est inclus dans $Vect(e_1, e_2, e_3)$, car $(1, 1, 0, 0) = e_1 + e_2$ et $(-1, 1, -4, 2) = -e_1 + e_2$. Comme il sont de même dimension ils sont égaux.
2. Vrai. On a $(1, 1, 0, 0) = e_1 + e_2$ donc $(1, 1, 0, 0) \in Vect(e_1, e_2)$, or $Vect(e_1, e_2) = Vect(e_2, e_3) \subset Vect(e_2, e_3, e_4)$. Donc $(1, 1, 0, 0) \in Vect(e_1, e_2) \cap Vect(e_2, e_3, e_4)$.
3. Faux. Toujours la même relation nous donne que $Vect(e_1, e_2) \cap Vect(e_2, e_3, e_4) = Vect(e_1, e_2)$ donc est de dimension 2.
4. Faux. Encore une fois la relation donne que $Vect(e_1, e_2) + Vect(e_2, e_3, e_4) = Vect(e_1, e_2, e_4)$, or 3 vecteurs ne peuvent engendré $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4.
5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est $\{0\}$ et la somme est $\mathbb{R}^4$.

Correction 10. 1. Non. Ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs. Premier type de raisonnement, on montre que $Vect(v_1, v_2) + Vect(v_3) = Vect(v_1, v_2, v_3)$, mais 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4. Autre type de raisonnoment : trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $Vect(v_1, v_2) + Vect(v_3)$: par exemple faire le calcul avec $(0, 0, 0, 1)$.

2. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en resolvant un système.

Correction 11. Les fonctions de E qui ne sont pas dans F sont Les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ **ou** $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R})$, ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R})$ n'appartiennent pas à F.
Posons

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f \in F \cap G$ alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.
Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.
En conclusion nous avons montrer que $E = F \oplus G$.

Correction 12. On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F \cap G = \{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2. $F + G = E$. Soit (u_n) un élément de E. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc

$(v_n) \in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ. Alors nous avons $u_n = \ell + u_n - \ell$, ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n) = (w_n) + (u_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E = F \oplus G$.