Licence 3

Equations différentielles

Année 2008

1) On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 2(x - ty) \\ \dfrac{dy}{dt} &= 2y. \end{cases}$$

1. Montrer que par tout point $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ passe une solution maximale ϕ et une seule. Montrer que cette solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la solution ϕ_0 qui passe par le point $(0, 1, 1)$.

3. On cherche à approcher la solution ϕ_0 par la métode d'Euler. On fixe $t > 0$, $n > 0$ un entier, $h = t/n$. On applique la méthode d'Euler avec le pas h. Calculer les coordonnées (x_n, y_n) du point atteint après n pas.

2) On considère l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t.$$

1. Montrer que par tout point $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une solution maximale ϕ et une seule. Montrer que cette solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la solution qui passe par y_0 pour $t = 0$.

3. Appliquer la méthode des approximations successives à ce problème de Cauchy en partant de la fonction constante $y_0(t) = y_0$: on calculera $y_1(t)$ et $y_2(t)$.